

## DER PHYSIK UND CHEMIE.

## NEUE FOLGE. BAND IX.

**I. Ueber das Verhalten der Kohlensture  
in Bezug auf Druck, Volumen und Temperatur;  
von R. Clausius.**

(Vorgetragen auf der 52. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte am 19. Sept. 1879.)

Die Gase folgen bekanntlich in Bezug auf Druck, Volumen und Temperatur mit einer gewissen Annäherung dem Mariotte'schen und dem Gay-Lussac'schen Gesetze, welche sich gemeinsam durch folgende Gleichung ausdrücken lassen, worin  $p$  den Druck,  $v$  das Volumen und  $T$  die absolute Temperatur darstellt, und  $R$  eine von der Natur des Gases abhängige Constante ist:

$$(1) \quad pv = RT.$$

Die Annäherung an diese Gesetze ist um so grösser, je weiter das betreffende Gas von seinem Condensationspunkte entfernt ist. Bei den Gasen, welche unter gewöhnlichen Umständen so weit von ihrem Condensationspunkte entfernt sind, dass man bis vor kurzem ihre Condensation nicht hatte bewirken können, und welche man daher permanente Gase nannte, ist die Annäherung so gross, dass man lange Zeit geglaubt hat, sie folgten diesen Gesetzen wirklich genau, bis zuerst Regnault durch seine bekannten ausgezeichneten Untersuchungen<sup>1)</sup> kleine Abweichungen nachwies. Etwas später zeigte Natterer<sup>2)</sup>, dass man bei Anwendung sehr grosser Druckkräfte sehr bedeutende Abweichungen vom Mariotte'schen Gesetze erhält, und zwar

1) Regnault, Mém. de l'Acad. des sciences. 21. 1847.

2) Natterer, Wien. Ber. 5. p. 351. 1850; 6. p. 557. 1851 u. 12. p. 199. 1854.

waren die von ihm beobachteten Abweichungen anderer Art, als die von Regnault gefundenen. Während nämlich Regnault bei allen von ihm untersuchten Gasen, mit Ausnahme des Wasserstoffs, gefunden hatte, dass der Druck langsamer zunimmt als die Dichtigkeit, stellte sich bei den Versuchen von Natterer heraus, dass bei sehr grossem Drucke die Sache sich umkehrt, und der Druck schneller zunimmt als die Dichtigkeit. Bei atmosphärischer Luft, Stickstoff und Kohlenoxydgas erreichte der Druck schon eine Grösse von etwa 3000 Atmosphären, als die Dichtigkeit erst die 700- bis 800-fache der unter dem Drucke von einer Atmosphäre stattfindenden Dichtigkeit geworden war.

Ueber die Gründe, auf welchen diese Abweichungen der Gase vom Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze beruhen, sprach ich mich in meiner 1857 veröffentlichten Abhandlung „Ueber die Art der Bewegung, welche wir Wärme nennen“, folgendermassen aus<sup>1)</sup>:

„Damit das Mariotte'sche und Gay-Lussac'sche Gesetz und die mit ihm in Verbindung stehenden Gesetze streng gültig seien, muss das Gas in Bezug auf seinen Molecularzustand folgenden Bedingungen genügen.

1) Der Raum, welchen die Molecüle des Gases wirklich ausfüllen, muss gegen den ganzen Raum, welchen das Gas einnimmt, verschwindend klein sein.

2) Die Zeit eines Stosses, d. h. die Zeit, welche ein Molecül, indem es gegen ein anderes Molecül oder gegen eine feste Wand stösst, bedarf, um seine Bewegung in der Weise zu ändern, wie es durch den Stoss geschieht, muss gegen die Zeit, welche zwischen zwei Stössen vergeht, verschwindend klein sein.

3) Der Einfluss der Molecularkräfte muss verschwindend klein sein. Hierin liegt zweierlei. Zunächst wird gefordert, dass die Kraft, mit welcher die sämtlichen

<sup>1)</sup> Clausius, Pogg. Ann. 100. p. 358. 1857 und Abhandlungensammlung 2. p. 235.

Molecüle sich in ihren mittleren Entfernungen noch gegenseitig anziehen, gegen die aus der Bewegung entstehende Expansivkraft verschwindet. Nun befinden sich aber die Molecüle nicht immer in ihren mittleren Entfernungen voneinander, sondern bei der Bewegung kommt oft ein Molecül in unmittelbare Nähe eines andern oder einer ebenfalls aus wirksamen Molecülen bestehenden festen Wand, und in solchen Momenten treten natürlich die Molecularkräfte in Thätigkeit. Die zweite Forderung besteht daher darin, dass die Theile des von einem Molecüle beschriebenen Weges, auf welchen diese Kräfte von Einfluss sind, indem sie die Bewegung des Molecüls in Richtung und Geschwindigkeit merklich ändern, gegen die Theile des Weges, auf welchen die Kräfte als unwirksam betrachtet werden können, verschwinden.

Wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind, so treten nach verschiedenen Richtungen hin Abweichungen von den einfachen Gesetzen der Gase ein, welche um so bedeutender werden, je weniger der Molecularzustand des Gases diesen Bedingungen entspricht.“

Die in dieser Stelle erwähnten, nach verschiedenen Richtungen hin eintretenden Abweichungen müssen sich, sofern man bei gegebener Temperatur und gegebenem Volumen den Druck betrachtet, darin äussern, dass dieser entweder grösser oder kleiner ist, als er, wenn man vom sehr verdünnten Zustande des Gases ausgeht, nach dem Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze sein sollte. Der oben unter 1) angeführte, von den Molecülen wirklich ausgefüllte Raum bedingt eine Vermehrung des Druckes, indem durch ihn bei einem gegebenen Volumen des Gases der für die Bewegung der Molecüle freie Raum verkleinert, und demgemäss die Anzahl der Stösse vergrössert wird. Die unter 3) angeführten Molecularkräfte bewirken beim Vorherrschen der Anziehung eine Verminderung des Druckes. Der unter 2) angeführte Umstand, nämlich die während eines Stosses vergehende Zeit, hat eine complicirtere Wirkung, indem beim Gegeneinanderfliegen zweier Molecüle

zunächst eine Beschleunigung und darauf erst die Verzögerung und Umkehrung der Bewegung eintritt. Man kann daher bei der auf die Gesamtwirkung gerichteten Betrachtung die Wirkung dieses Umstandes theils der des ersten, theils der des letzten Umstandes anschliessen.

Von den beiden entgegengesetzten Wirkungen der Druckvermehrung und Druckverminderung kann je nach Umständen die eine oder die andere überwiegen. Die oben angeführten Versuche von Regnault und Natterer ergeben beim Wasserstoff durchweg ein Ueberwiegen der Druckvermehrung, während sie bei den anderen Gasen erkennen lassen, dass bei geringeren Dichtigkeiten die Druckverminderung und bei grösseren Dichtigkeiten die Druckvermehrung überwiegt.

Noch complicirter wird das Verhalten eines Stoffes, wenn er bei der Verdichtung nicht immer gasförmig bleibt, sondern seinen Aggregatzustand ändert, indem er flüssig wird.

Ueber den Zusammenhang dieses Vorganges mit den vorher besprochenen Vorgängen sind in neuerer Zeit sehr schöne Versuche von Andrews angestellt, indem er Kohlensäure bei verschiedenen Temperaturen starken Verdichtungen unterwarf und die dabei stattfindende Druckzunahme beobachtete.<sup>1)</sup> Er fand dabei, dass ein wesentlicher Unterschied im Verhalten der Kohlensäure stattfindet, je nachdem die Temperatur über oder unter  $31^{\circ}$  liegt. Ueber  $31^{\circ}$  zeigen sich nur die oben erwähnten Abweichungen vom Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze, unter  $31^{\circ}$  aber tritt bei einem gewissen Drucke die Condensation ein.

Andrews hat die von ihm beobachteten Beziehungen zwischen Druck und Volumen durch Curven dargestellt, welche Druck und Volumen als Abscissen und Ordinaten haben. Die auf Temperaturen über  $31^{\circ}$  bezüglichen Curven zeigen einen stetigen Verlauf; die auf Temperaturen

1) Andrews, Phil. Trans. for 1869, p. 575.



unter  $31^{\circ}$  bezüglichlichen dagegen sind gebrochen, indem bei abnehmendem Volumen anfänglich der Druck wächst, von einem gewissen Volumen an aber, bei welchem die Condensation beginnt, die folgende Volumenabnahme ohne Druckzunahme stattfindet, und erst bei einem viel kleineren Volumen, bei dem die ganze Masse flüssig ist, der Druck wieder mit abnehmendem Volumen zu wachsen beginnt, welches Wachsen dann sehr schnell geschieht. Der Theil der Curve, welcher dem Condensationsvorgange entspricht, ist eine gerade Linie, mit welcher die stetig gekrümmten Theile an beiden Enden zusammentreffen. Eine kleine, an dem einen Ende der Geraden von Andrews gezeichnete Krümmung scheint auf etwas Luftbeimischung zu beruhen und kann daher hier unberücksichtigt bleiben.

Zwei Jahre später<sup>1)</sup> hat James Thomson, dessen sinnreiche Betrachtungen schon so viel zur Erweiterung der mechanischen und physikalischen Wissenschaft beigetragen haben, die Curven von Andrews dadurch ergänzt, dass er an den Stellen, wo sich dort eine gerade Linie befindet, eine gekrümmte Linie hinzugefügt hat, die sich an die beiden gekrümmten Theile der von Andrews gegebenen Curve in stetiger Weise anschliesst und einen allmählichen Uebergang aus dem gasförmigen in den flüssigen Zustand darstellt, bei welchem stets die ganze Menge des Stoffes sich in gleichem Zustande befindet, eine Art des Ueberganges, welche theoretisch denkbar ist, aber in der Wirklichkeit deshalb nicht vorkommen kann, weil sie Zwischenzustände enthält, in denen kein stabiles, sondern nur ein labiles Gleichgewicht besteht.

Auf Taf. II Fig. 1 ist die von Andrews gegebene Figur mit den von J. Thomson hinzugefügten, punktirt gezeichneten Ergänzungscurven wiedergegeben. Nur ist das äussere Arrangement der Figur in einer zuerst von Maxwell in Anwendung gebrachten Weise geändert. Andrews hat nämlich in seiner Figur den Druck durch

1) Proc. of Roy. Soc. of London. Nov. 1871.

die Abscissen und das Volumen durch die Ordinaten dargestellt. Nun ist es aber in der mechanischen Wärmetheorie Brauch, das Volumen durch die Abscissen und den Druck durch die Ordinaten darzustellen, und diesem Brauche gemäss ist die Figur umgezeichnet.

In den zu den Temperaturen  $13,1^{\circ}$  und  $21,5^{\circ}$  gehörenden Curven sind *ae* und *fk* die oben erwähnten, dem Condensationsvorgange entsprechenden geraden Linien, welche J. Thomson durch die punktirt gezeichneten gekrümmten Linien *abcde* und *fgvik* ersetzt hat.

J. Thomson hat seinen Schluss über die Gestalt dieser Linien nur aus der Gestalt der zu den höheren Temperaturen gehörenden Curven von Andrews gezogen, indem er verfolgte, wie diese letzteren sich bei der Annäherung an die Temperatur von  $31^{\circ}$  allmählich ändern, und dann dieselbe Art der Aenderung auch unter  $31^{\circ}$  fortsetzte. Auf eine Untersuchung der Gründe für diese eigenthümliche Gestaltung der Druckcurven und auf die Bildung eines ihnen entsprechenden mathematischen Ausdruckes ist er nicht eingegangen.

Was diesen letztern Punkt, nämlich die mathematische Behandlung des Gegenstandes, anbetrifft, so sind theils vor, theils nach der von Andrews ausgeführten experimentellen Untersuchung von verschiedenen Autoren Versuche gemacht, die Abweichungen der Gase vom Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze durch eine Gleichung auszudrücken.

Rankine<sup>1)</sup> hat an Stelle von (1) eine Gleichung aufgestellt, mit welcher auch eine von W. Thomson und Joule<sup>2)</sup> aus ihren Versuchen über die bei der Ausdehnung von Gasen stattfindende Temperaturänderungen abgeleitete Gleichung sehr nahe übereinstimmt, und welche sich in ihrer einfachsten Form so schreiben lässt:

1) Siche Phil. Trans. for 1854, p. 336.

2) Thomson u. Joule, Phil. Trans. 1862, p. 579.

$$(2) \quad pv = RT - \frac{c}{Tv},$$

worin  $c$  ebenso, wie  $R$ , eine Constante bedeutet.

Hirn<sup>1)</sup> hat mit der Gleichung (1) eine Umbildung vorgenommen, bei welcher die beiden oben erwähnten Umstände, welche vorzugsweise die Abweichung der Gase vom Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze veranlassen, nämlich das Volumen der Moleculé und ihre gegenseitige Anziehung durch Einführung besonderer Grössen zur Geltung gebracht sind. Die von ihm gebildete Gleichung, welche nicht nur auf Gase, sondern auch auf Körper von anderen Aggregatzuständen anwendbar sein soll, lautet:

$$(3) \quad (p + r)(v - \psi) = RT.$$

Hierin bedeutet  $\psi$  „la somme de volumes des atomes“ und  $r$  „la somme des actions internes“, welche letztere Grösse er auch „la pression interne“ nennt. Bei der weitem Behandlung dieser Gleichung, durch welche Hirn die Grössen  $\psi$  und  $r$  zu bestimmen sucht, macht er Schlüsse, welche mir nicht gerechtfertigt zu sein scheinen, und deren Resultat daher auch meiner Ansicht nach der Wirklichkeit nicht entspricht.

Recknagel hat in einer 1871 erschienenen und 1872 noch vervollständigten Abhandlung<sup>2)</sup> an Stelle von (1) eine Gleichung gebildet, welche äusserlich mit der von Rankine aufgestellten Gleichung übereinstimmt. Sie hat die Form:

$$(4) \quad pv = RT \left( 1 - \frac{B_t}{v} \right),$$

worin  $R$  eine Constante und  $B_t$  eine Temperaturfunction bedeutet. Diese letztere hat Recknagel anders bestimmt als Rankine, indem sie nach ihm der absoluten Temperatur direct und dem dieser Temperatur entsprechenden

1) Hirn, *Théorie mécanique de la chaleur*, seconde édition 1865. 1. p. 195; troisième édition 2. p. 211.

2) Recknagel, *Pogg. Ann. Ergbd.* 5. p. 563 u. 145. p. 469. 1872.

Drucke des gesättigten Dampfes des gegebenen Stoffes umgekehrt proportional sein soll.

J. D. van der Waals hat in einer nach der Veröffentlichung der oben citirten Versuche von Andrews erschienenen, sehr interessanten Schrift<sup>1)</sup> an Stelle von (1) eine Gleichung gebildet, in welcher, wie bei Hirn, die beiden Umstände, der von den Molecülen erfüllte Raum und die gegenseitige Anziehung der Molecüle, berücksichtigt sind, und welche folgende Form hat:

$$(5) \quad \left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT,$$

oder nach  $p$  aufgelöst:

$$(5a) \quad p = R \frac{T}{v - b} - \frac{a}{v^2},$$

worin  $R$ ,  $a$  und  $b$  Constante sein sollen. Die Werthe dieser Constanten hat van der Waals für Kohlensäure folgendermassen bestimmt<sup>2)</sup>, wobei als Einheit des Druckes eine Atmosphäre und als Einheit des Volumens dasjenige Volumen angenommen ist, welches die Kohlensäure unter dem Drucke von einer Atmosphäre beim Gefrierpunkte einnimmt. Die in dem Werthe der ersten Constanten als Nenner stehende Grösse  $T_0$  stellt die dem Gefrierpunkte entsprechende absolute Temperatur, also angenähert die Zahl 273 dar.

$$(6) \quad \begin{cases} R = \frac{1,00646}{T_0}, \\ a = 0,00874, \\ b = 0,0023. \end{cases}$$

Diese Gleichung, welche ihrer Form nach ausserordentlich einfach ist, gibt Druckcurven, welche den von Andrews construirten und von J. Thomson vervollständigten Curven ihrer Gestalt nach gut entsprechen, und den charakteristischen Unterschied zwischen den Gestalten,

1) Van der Waals, Over de continuïteit van den gas- en Vloeistoftoestand, Leiden 1873, p. 56.

2) Van der Waals, p. 76 seiner Schrift.

welche zu Temperaturen über und unter  $31^{\circ}$  gehören, ebenfalls zeigen.

Was aber die genauere numerische Uebereinstimmung der aus dieser Gleichung berechneten Werthe von  $p$  mit den von Andrews beobachteten Werthen anbetrifft, so hat schon van der Waals selbst die Bemerkung gemacht, dass bei solchen Volumen, die kleiner als 0,0046 sind, der Werth von  $b$  nicht mehr als constant betrachtet werden dürfe, sondern mit abnehmendem Volumen verkleinert werden müsse. Welches aber die Function des Volumens sei, durch die man  $b$  darzustellen habe, sei ihm noch nicht geglückt, zu finden.<sup>1)</sup>

Dazu kommen noch andere Abweichungen, die sich erst später herausstellen konnten. Nach der Veröffentlichung der Schrift von van der Waals hat nämlich das zur Vergleichung mit den berechneten Werthen geeignete Beobachtungsmaterial eine grosse und wichtige Bereicherung erfahren, indem Andrews seine Untersuchungen fortgesetzt und im Jahre 1876 drei neue Beobachtungsreihen für die Temperaturen  $6,5^{\circ}$ ,  $64^{\circ}$  und  $100^{\circ}$  veröffentlicht hat<sup>2)</sup>, welche die früher veröffentlichten an Ausdehnung weit übertreffen und auch wohl eine erhöhte Genauigkeit besitzen. Bei der Vergleichung mit diesen Versuchen zeigt sich, dass die von van der Waals aufgestellte Gleichung mit der Erfahrung nicht übereinstimmt, und auch nicht durch eine Veränderung der den Constanten beigelegten Werthe zur Uebereinstimmung gebracht werden kann, sondern dass sie dazu einer wesentlicheren Modification bedarf.

Der Hauptgrund dieser Abweichungen scheint mir folgender zu sein. Van der Waals hat es als selbstverständlich angenommen, dass die gegenseitige Anziehung der Molecüle von der Temperatur unabhängig sei und also nur eine Function des Volumens sein könne. Danach müsste, wenn eine Quantität des Gases bei constantem

1) Van der Waals, p. 78 und 52 seiner Schrift.

2) Andrews, Phil. Trans. for 1876, p. 421

Volumen erwärmt würde, die Molecularanziehung unverändert bleiben. Dieses würde allerdings richtig sein, wenn die Bewegung der Gasmoleculé bei niedrigerer und höherer Temperatur sich nur durch die verschiedene Grösse der mittlern lebendigen Kraft der Bewegung unterschiede, im übrigen aber in ganz gleicher Weise stattfände, indem die Wege aller Moleculé und die Verhältnisse der Geschwindigkeiten in den verschiedenen Stadien eines Weges dieselben blieben. Auch glaube ich, dass man eine solche Annahme über die Gleichartigkeit der Bewegung in dem Falle machen darf, wo man nur den idealen Zustand eines Gases betrachtet, welchen wir den vollkommenen Gaszustand nennen. Wenn es sich aber darum handelt, die Abweichungen eines Gases vom vollkommenen Gaszustande zu untersuchen, so scheint mir dabei diese Annahme nicht mehr zulässig zu sein.

Ich will über die Art, wie die Bewegung beim Verlassen des vollkommenen Gaszustandes sich ändert, hier keine bestimmte Theorie aufstellen, aber ich will mir wenigstens erlauben, eine Art der Aenderung als eine mögliche anzuführen. Für den vollkommenen Gaszustand ist anzunehmen, dass jede zwei Moleculé, welche zusammenfliegen, sich nach dem Zusammenstosse wieder trennen. Wenn das Gas dagegen zur Flüssigkeit condensirt ist, so findet ein ganz anderes Verhalten statt, nämlich dass die Moleculé im allgemeinen durch ihre gegenseitige Anziehung zusammengehalten werden und nur ausnahmsweise, bei besonders günstigem Zusammentreffen der Bewegungsphasen, einzelne Moleculé sich von der übrigen Masse trennen. Zwischen diesen beiden extremen Zuständen kann man sich nun wohl einen Zwischenzustand von der Art denken, dass zwar der Regel nach die Moleculé sich nach dem Zusammenstosse wieder trennen, dass es aber doch zuweilen vorkommt, dass zwei Moleculé nach dem Zusammentreffen sich nicht wieder trennen, sondern nur gegen einander oscilliren, während sie die fortschreitende Bewegung gemeinsam ausführen, bis etwa durch die bei weiteren Zu-

sammenstössen eintretende Veränderung der Bewegung die Trennung wieder veranlasst wird. Die Anzahl solcher zusammenhaftenden Molecülpaare würde dann um so grösser werden, je niedriger die Temperatur und je geringer daher die mittlere lebendige Kraft der Bewegung würde, und es könnten bei weiterem Sinken der Temperatur auch Fälle hinzukommen, wo nicht blos zwei, sondern mehrere Molecüle zusammenhafteten und als Molecülgruppen die fortschreitende Bewegung gemeinsam machten.

Wenn ein solches Verhalten einträte, so würde dadurch die mittlere Stärke der gegenseitigen Anziehung der Molecüle wachsen, indem die vereinigt bleibenden Molecüle sich natürlich wegen der grössern Nähe auch stärker anzögen, und demgemäss dürfte man die Grösse, welche in der Formel die gegenseitige Anziehung der Molecüle repräsentirt, nicht als von der Temperatur unabhängig betrachten, sondern müsste annehmen, dass sie mit sinkender Temperatur grösser würde.

Ferner hat van der Waals aus theoretischen Betrachtungen den auch schon von anderen in ihren Formeln ausgedrückten Schluss gezogen, dass die durch die gegenseitige Anziehung der Molecüle bedingte Abnahme des Druckes dem Quadrate des Volumens umgekehrt proportional sei. Diesen Schluss kann man für grössere Volumina als angenähert richtig zugestehen, braucht ihm aber keine allgemeine und strenge Gültigkeit zuzuschreiben, sondern kann annehmen, dass auch von ihm eine Abweichung statfinde, die um so grösser werde, je mehr sich das Volumen verkleinere.

Ich habe nun versucht, eine Formel für  $p$  zu bilden, welche aus den früheren Formeln dasjenige beibehält, was mir in ihnen richtig zu sein scheint, zugleich aber den oben erwähnten modificirenden Umständen Rechnung trägt, und bei möglichster Einfachheit mit den älteren und neueren Beobachtungen von Andrews, sowie auch mit den sonst vorhandenen Beobachtungen genügend übereinstimmt. Es ist dieses wegen eines besondern Umstandes mit grossen

Schwierigkeiten verbunden. Die für  $p$  zu bildende Formel hat nämlich, wie man schon aus den Gleichungen (2), (3), (4) und (5), wenn man sie nach  $p$  auflöst, ersehen kann, die Eigenthümlichkeit, dass sie die Differenz aus zwei Grössen ist, welche beide viel grössere Werthe haben können, als  $p$ . Dadurch wird es bewirkt, dass Ungenauigkeiten, welche im Verhältnisse zu den beiden einzelnen Grössen nur klein sind, doch in  $p$  im Verhältniss zu seinem Werthe bedeutende Abweichungen von der Erfahrung hervorbringen können, und dass daher die Bestimmung der einzelnen Grössen um so genauer stattfinden muss.

Die Formel, welche ich gebildet habe, hat folgende Gestalt:

$$(7) \quad p = R \frac{T}{v - \alpha} - \frac{c}{T(v + \beta)^2},$$

worin  $R$ ,  $c$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  Constante sind.

Diesen Constanten hat man für Kohlensäure, wenn man als Druckeinheit eine Atmosphäre und als Volumeneinheit, wie vorher, dasjenige Volumen wählt, welches die Kohlensäure unter dem Drucke von einer Atmosphäre und bei der Temperatur des Gefrierpunktes einnimmt, folgende Werthe zu geben:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} R = \frac{1,00682}{T_0} = 0,003\,688 \\ c = 2,0935 \\ \alpha = 0,000\,843 \\ \beta = 0,000\,977. \end{array} \right.$$

Wählt man dagegen als Druckeinheit den Druck eines Kilogramm auf ein Quadratmeter und als Volumeneinheit ein Cubikmeter, indem man dabei voraussetzt, dass die betrachtete Menge Kohlensäure ein Kilogramm sei, so hat man den Constanten folgende Werthe beizulegen:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} R = 19,273 \\ c = 5533 \\ \alpha = 0,000\,426 \\ \beta = 0,000\,494. \end{array} \right.$$



Zur Prüfung der Uebereinstimmung dieser Formel mit der Erfahrung habe ich die drei neueren Beobachtungsreihen von Andrews, welche sich auf die Temperaturen  $6,5^{\circ}$ ,  $64^{\circ}$  und  $100^{\circ}$  beziehen, und drei der älteren Beobachtungsreihen, welche sich auf die Temperaturen  $13,1^{\circ}$ ,  $31,1^{\circ}$  und  $48,1^{\circ}$  beziehen, zur Vergleichung gewählt. Bei jeder dieser Reihen habe ich aus den darin vorkommenden Volumen eine Anzahl, welche sich über das ganze Beobachtungsintervall möglichst gleichmässig vertheilen, zur Betrachtung ausgewählt. Dabei ist aber noch zu bemerken, dass Andrews die Volumen nicht so ausgedrückt hat, dass allen Zahlen eine und dieselbe Einheit zu Grunde liegt, sondern dass er bei jeder Temperatur dasjenige Volumen, welches die Kohlensäure bei dieser Temperatur unter dem Drucke von einer Atmosphäre einnimmt, als Einheit genommen hat. Das auf diese Weise ausgedrückte Volumen hat er mit  $\epsilon$  bezeichnet. Um hieraus das von uns mit  $v$  bezeichnete Volumen, bei dem das beim Gefrierpunkte unter dem Drucke von einer Atmosphäre von der Kohlensäure eingenommene Volumen als Einheit zu Grunde liegt, zu berechnen, müssen wir den Ausdehnungscoefficienten der Kohlensäure unter atmosphärischem Drucke kennen. Für diesen ist der von Regnault gefundene Werth 0,00371, welchen auch Andrews in seinen Rechnungen benutzt hat, in Anwendung gebracht.

Die so erhaltenen Werthe von  $v$  sind zugleich mit den betreffenden Temperaturen in die Formel eingesetzt, und aus dieser dann die dazu gehörigen Werthe von  $p$  berechnet. Diese Werthe sind in den folgenden Tabellen mit  $p$  (ber.) bezeichnet, und unter ihnen stehen die entsprechenden beobachteten Werthe, welche mit  $p$  (beob.) bezeichnet sind. Auch sind noch die mit  $\Delta$  bezeichneten Differenzen zwischen den beobachteten und den berechneten Werthen von  $p$  hinzugefügt. Bei jeder Reihe ist angegeben, ob sie zu den älteren oder neueren Beobachtungsreihen von Andrews gehört.

## I. Temp. 6,5° (neuere Reihe).

$\varepsilon$	$\frac{1}{16,13}$	$\frac{1}{29,62}$	$\frac{1}{45,80}$
$v$	0,06349	0,03458	0,02236
$p$ (ber.)	14,65	24,63	34,15
$p$ (beob.)	14,68	24,81	34,49
$\Delta$	- 0,03	- 0,18	- 0,34

## II. Temp. 13,1° (ältere Reihe).

$\varepsilon$	$\frac{1}{76,16}$	$\frac{1}{80,43}$	$\frac{1}{480,4}$	$\frac{1}{\varepsilon 10,7}$
$v$	0,013 768	0,013 037	0,002 182 8	0,002 053 2
$p$ (ber.)	47,98	49,27	54,66	74,96
$p$ (beob.)	47,50	48,76	54,56	90,43
$\Delta$	+ 0,48	+ 0,51	+ 0,10	- 15,47

## III. Temp. 31,1° (ältere Reihe).

$\varepsilon$	$\frac{1}{80,55}$	$\frac{1}{124,4}$	$\frac{1}{174,4}$	$\frac{1}{311,1}$	$\frac{1}{405,5}$
$v$	0,013 847	0,008 966	0,006 395	0,003 585	0,002 751
$p$ (ber.)	54,92	68,44	75,33	78,22	92,47
$p$ (beob.)	54,79	67,60	73,83	75,40	85,19
$\Delta$	+ 0,13	+ 0,84	+ 1,50	+ 2,82	+ 7,28

## IV. Temp. 48,1° (ältere Reihe).

$\varepsilon$	$\frac{1}{86,45}$	$\frac{1}{146,8}$	$\frac{1}{293,4}$
$v$	0,013 631	0,008 028	0,003 949
$p$ (ber.)	62,05	84,42	112,6
$p$ (beob.)	62,60	84,35	109,4
$\Delta$	- 0,55	+ 0,07	+ 3,2

## V. Temp. 64° (neuere Reihe).

$\varepsilon$	$\frac{1}{24,18}$	$\frac{1}{46,34}$	$\frac{1}{83,44}$	$\frac{1}{185,5}$	$\frac{1}{449,4}$
$v$	0,05118	0,02670	0,01483	0,006 671	0,002 772
$p$ (ber.)	22,41	39,95	63,99	107,06	202,30
$p$ (beob.)	22,56	40,54	64,96	106,88	222,92
$\Delta$	- 0,15	- 0,59	- 0,97	+ 0,18	- 20,62

## VI. Temp. 100° (neuere Reihe).

$\varepsilon$	$\frac{1}{26,09}$	$\frac{1}{50,63}$	$\frac{1}{96,65}$	$\frac{1}{213,0}$	$\frac{1}{379,3}$
$v$	0,05255	0,02708	0,014 185	0,006 289	0,003 615
$p$ (ber.)	24,65	45,30	78,69	146,29	230,09
$p$ (beob.)	24,85	45,99	80,25	145,44	223,57
$\Delta$	- 0,20	- 0,69	- 1,56	+ 0,85	+ 6,52

Aus diesen Tabellen ist ersichtlich, dass zwischen den aus der Formel berechneten und den beobachteten Werthen von  $p$  im allgemeinen eine genügende und zum Theil eine auffallend gute Uebereinstimmung stattfindet. Indessen kommen bei den grössten in den Versuchen erreichten Dichtigkeiten der Kohlensäure, welche das Vier- bis Fünfhundertfache der unter dem Drucke von einer Atmosphäre stattfindenden Dichtigkeiten betragen, doch erhebliche Differenzen vor. Diese veranlassten mich anfangs, mit der Formel noch eine Aenderung vorzunehmen, indem ich im zweiten Gliede noch eine Temperaturfunction als Factor einführte, welche dazu dienen sollte, die Differenzen auszugleichen. Dadurch verlor aber die Formel ihre bisherige Einfachheit, und es entstand die Frage, ob jene Differenzen wirklich von so grosser Bedeutung sind, um eine solche Aenderung der Formel zu rechtfertigen. Diese Frage glaubte ich bei näherer Betrachtung der Sache verneinen zu müssen.

Die Differenzen wechseln nämlich in ganz auffälliger Weise ihr Vorzeichen. Bei 13,1° ist die grösste Differenz negativ, bei 31,1° positiv, bei 64° negativ und bei 100° wieder positiv. Ein so häufiger Zeichenwechsel spricht nicht dafür, dass der Grund der Differenzen in der Formel liegt, sondern mehr dafür, dass er in Beobachtungsfehlern zu suchen ist. Auch sind im vorliegenden Falle, selbst bei sorgfältigster Beobachtung, solche Fehler sehr wohl denkbar. Das Volumen der stark verdichteten Kohlensäure wurde in Capillarröhren gemessen. Wenn es nun schon so klein geworden war, dass es nur noch ein Vier-

bis Fünfhundertstel seiner ursprünglichen Grösse betrug, so konnten bei der Ablesung leicht Fehler vorkommen, welche zwar, absolut genommen, sehr klein, aber verhältnissmässig doch gross genug waren, um in der Formel für  $p$ , welche bei kleinen Werthen von  $v$  ihren Werth sehr schnell mit  $v$  ändert, Differenzen von den in der Tabelle vorkommenden Grössen zu verursachen.

Auch das zur Bestimmung des Druckes dienende Luftmanometer bestand aus einer Capillarröhre, in welcher die Luft bei den grössten vorkommenden Drucken, so kleine Volumina einnahm, dass ein geringer Beobachtungsfehler einen sehr grossen Einfluss auf den aus der Beobachtung abgeleiteten Druck ausüben musste.

Ferner ist zu bemerken, dass Andrews bei der Ableitung des Druckes aus den Angaben des Luftmanometers von der Voraussetzung ausgegangen ist, dass die Luft bis zu den grössten in den Versuchen angewandten Drucken, welche bis über zweihundert Atmosphären reichten, dem Mariotte'schen Gesetze folge. Dieses ist aber bekanntlich nicht der Fall, sondern es finden bei solchen Drucken schon beträchtliche Abweichungen statt. Ich versuchte anfangs, unter Zuhülfenahme der Beobachtungen von Cailletet und Amagat über die Zusammendrückung des Stickstoffs, die aus den Manometerangaben abgeleiteten Druckgrössen zu corrigiren, fand aber, dass die Beobachtungsergebnisse dieser beiden Forscher doch nicht in genügender Weise unter einander übereinstimmen, um sie mit hinlänglicher Sicherheit zu einer solchen Correction anwenden zu können. Ich habe daher in der Tabelle einfach die von Andrews angeführten Werthe von  $p$  wiedergegeben.

Endlich muss ich noch auf einen eigenthümlichen Unterschied aufmerksam machen, welcher sich in den zwischen den berechneten und den beobachteten Werthen von  $p$  stattfindenden Differenzen zeigt. In den älteren Beobachtungsreihen sind nämlich die Differenzen fast alle positiv und in den neueren fast alle negativ. Auch dieser Unterschied spricht dafür, dass die Differenzen ihren Grund

ug,  
en,  
lt-  
nel  
hr  
lle

ft-  
lie  
ne  
ler  
ng

b-  
ers  
ois  
en,  
em  
ch  
en  
te  
l-  
k-  
k-  
s-  
er  
g-  
zu  
on

en  
on  
n  
n  
e  
r  
d

mehr  
in d

den  
Unsi  
Uebe  
achte  
Ich h  
plici  
und  
zurü  
dern  
diene

ich d  
die a  
mit  
resul  
und  
säure  
posit  
stan  
Reg  
Koh  
And  
glau  
wärt  
bei d  
ande

Ansi  
anwe  
Gas

erör  
An

mehr in den die Versuche beeinflussenden Umständen, als in der Formel haben.

Aus allen diesen Gründen muss man auf eine gewisse, den grössten beobachteten Werthen von  $p$  noch anhaftende Unsicherheit schliessen, und demgemäss darf man an die Uebereinstimmung zwischen den berechneten und den beobachteten Werthen keine zu strengen Anforderungen stellen. Ich habe daher von der oben erwähnten, die Formel complicirter machenden Aenderung wieder Abstand genommen und bin auf ihre ursprüngliche und einfachste Gestalt zurückgekommen, welche mir nicht nur in praktischer, sondern auch in theoretischer Beziehung den Vorzug zu verdienen scheint.

Die in der Formel vorkommenden Constanten habe ich durch ziemlich mühsame Rechnungen so bestimmt, dass die aus der Formel sich ergebenden Werthe von  $p$  sowohl mit den neueren, als auch mit den älteren Beobachtungsergebnissen von Andrews möglichst gut übereinstimmen, und dass von den bei grossen Dichtigkeiten der Kohlensäure bestehenden bleibenden Differenzen ungefähr ebensoviel positiv, wie negativ sind. Bei diesen Werthen der Constanten findet auch mit den Beobachtungsergebnissen von Regnault, welche in Bezug auf die Verdichtung der Kohlensäure lange nicht so weit reichen, wie die von Andrews, eine genügende Uebereinstimmung statt. Ich glaube daher, dass diese Werthe der Constanten dem gegenwärtig vorhandenen Beobachtungsmaterial, welches gerade bei der Kohlensäure vollständiger ist, als bei irgend einem anderen Gase, mit hinlänglicher Genauigkeit entsprechen.

Was die anderen Gase anbetrifft, so kann man meiner Ansicht nach die allgemeine Gleichung (7) auch auf diese anwenden, muss aber natürlich die Constanten für jedes Gas besonders bestimmen.

Im Anschluss an das Vorige muss noch eine Frage erörtert werden, welche sich bei der Betrachtung der von

Andrews gezeichneten und von James Thomson vervollständigten Druckcurven aufdrängt.

Wenn ein Gas, z. B. Kohlensäure, bei einer unter der kritischen Temperatur liegenden Temperatur zusammengeedrückt wird, so beginnt bei einem gewissen Volumen die Condensation, und es tritt damit ein Zustand ein, in welchem ein Theil des Stoffes flüssig und der andere gasförmig ist. So lange dieser Zustand bei der weiteren Volumenverminderung fort dauert, bleibt der Druck constant und das entsprechende Stück der isothermischen Druckcurve ist somit eine horizontale gerade Linie. Neben dieser geraden Linie kann man sich, wie oben besprochen wurde, nach James Thomson noch eine andere isothermische Druckcurve denken, welche denjenigen Druck darstellt, der bei derselben Volumenänderung stattfinden würde, wenn diese in der Weise vor sich ginge, dass stets die ganze Menge des Stoffes sich in gleichem Zustande befände. Wenn diese letztere Art der Volumenänderung auch in der Wirklichkeit nicht stattfindet, weil die in ihr vorkommenden Gleichgewichtszustände zum Theil labil sind, so muss man sie doch als theoretisch möglich betrachten, und in der That stellt die letztere Druckcurve den durch unsere Formel bestimmten Druck dar.

Es fragt sich nun aber, in welcher Lage diese theoretische Druckcurve und die dem wirklichen Vorgange entsprechende horizontale gerade Linie sich zueinander befinden.

James Thomson hat sich darüber nicht ausgesprochen, sondern hat nur in der auf Taf. II, Fig. 1 wiedergegebenen Andrews'schen Figur zu den auf die Temperaturen  $13,1^{\circ}$  und  $21,5^{\circ}$  bezüglichen Druckcurven die dort punktirt gezeichneten Curvenstücke hinzugefügt. Diese sollen wahrscheinlich nur dazu dienen, eine ungefähre Vorstellung von der möglichen Gestalt und Lage der Curvenstücke zu geben. Als wirklich richtig können sie in dieser Form nicht gelten.

Maxwell geht in den ersten Auflagen seines Buches



„Theory of Heat“ p. 125 näher auf die Sache ein. Denkt man sich eine der stetig verlaufenden theoretischen Druckcurven, z. B. die zu der Temperatur  $13,1^{\circ}$  gehörige, gegeben und zeichnet die horizontale Gerade in verschiedenen Höhen hinein, so erhält man jedesmal zwei Punkte  $a$  und  $e$  als Endpunkte der Geraden. Die Differenz zwischen den beiden Werthen, welche die Energie des Stoffes in den diesen beiden Punkten entsprechenden Zuständen hat, ist für die verschiedenen Lagen der Geraden verschieden gross, und nun sagt Maxwell, diejenige Lage der Geraden, bei der diese Differenz ein Maximum sei, sei die richtige. In der vierten Auflage seines Buches aber ist diese Stelle geändert und die Lage der horizontalen Geraden unbestimmt gelassen. Man muss daher wohl annehmen, dass Maxwell seine frühere Ansicht über diesen Punkt später wieder aufgegeben hat.

Van der Waals sagt auf p. 121 seiner oben citirten Schrift: „Es hat mir nicht glücken wollen, in einer der Eigenschaften des gesättigten Dampfes ein Merkmal zu finden, durch welches festgestellt werden könnte, wo die (gerade) Linie durch die Isotherme gezogen werden muss.“

Hiernach darf wohl die Frage, welche Lage die den Druck des gesättigten Dampfes angehende horizontale Gerade in der isothermischen Druckcurve hat, als eine noch offene angesehen werden, und ich will mir erlauben, diejenige Beantwortung dieser Frage, welche sich mir bei der Betrachtung des Gegenstandes dargeboten hat, hier mitzutheilen.

Wenn man die für die Temperatur von  $13,1^{\circ}$  von Andrews gezeichnete und von J. Thomson vervollständigte Druckcurve betrachtet, so sieht man, dass sie von  $m$  bis  $a$  und weiterhin von  $e$  bis  $n$  einfach, dagegen zwischen  $a$  und  $e$  doppelt ist. Zwischen den beiden Zuständen des Stoffes, welche den Punkten  $a$  und  $e$  entsprechen, und welche wir kurz die Zustände  $a$  und  $e$  nennen wollen, gibt es also zwei Wege, auf welchen der Stoff aus dem einen in den andern übergehen kann. Der Uebergang kann auf jedem

dieser Wege unter ganz gleichen Umständen sowohl in der Richtung von  $a$  nach  $e$ , als auch in der Richtung von  $e$  nach  $a$  stattfinden, und die betreffenden Veränderungen sind somit beide als umkehrbar zu bezeichnen.

Denken wir uns nun, dass der Stoff auf dem durch die Curve  $abcde$  dargestellten Wege von  $a$  nach  $e$  übergehe und auf dem durch die Gerade  $ea$  dargestellten Wege wieder von  $e$  nach  $a$  zurückkehre, so haben wir einen umkehrbaren Kreisprocess. Für die im Verlaufe desselben dem veränderlichen Stoffe von aussen her mitgetheilten positiven oder negativen Wärmemengen, deren Element  $dQ$  heissen möge, muss daher die bekannte Gleichung:

$$\int \frac{dQ}{T} = 0$$

gelten. Da nun im gegenwärtigen Falle die Temperatur  $T$  constant ist, indem die Linien, welche den Kreisprocess graphisch darstellen, nur isothermische Linien für eine und dieselbe Temperatur sind, so vereinfacht sich die Gleichung in:

$$\int dQ = 0.$$

Die dem Stoffe mitgetheilten, theils positiven, theils negativen Wärmemengen heben sich also gegenseitig auf.

Daraus folgt weiter, dass auch die während des Kreisprocesses gethane, theils positive, theils negative äussere Arbeit sich aufheben muss. Die zu den beiden Abschnitten des Kreisprocesses gehörenden Ueberschüsse der positiven Arbeit über die negative werden durch die in der Figur vorkommenden Flächenräume dargestellt, und zwar stellt der über der Geraden liegende Flächenraum  $cdec$  einen positiven, und der unter der Geraden liegende Flächenraum  $abca$  einen negativen Ueberschuss dar. Diese beiden Flächenräume müssen somit, um für die Gesamtarbeit den Werth Null zu geben, unter einander gleich sein. Hierdurch ist, wenn die dem homogenen Zustande entsprechende theoretische Druckcurve gegeben ist, auch die Lage der dem wirklichen Verdampfungs- und Condensationsprocesses entsprechenden horizontalen geraden Linie bestimmt.

Man kann die vorstehende Bedingung folgendermassen als Satz aussprechen: Der Druck des gesättigten Dampfes ist so gross, dass die äussere Arbeit, welche bei der Verdampfung geleistet wird, gleich derjenigen ist, welche geleistet werden würde, wenn der Stoff bei derselben Volumenzunahme homogen bliebe. Man kann dieses auch noch etwas kürzer so fassen: Der Druck des gesättigten Dampfes ist gleich dem mittlern Drucke des homogen bleibenden Stoffes bei einer der vollständigen Verdampfung entsprechenden Volumenzunahme.

Die von J. Thomson für die Temperatur von  $13,1^{\circ}$  zwischen  $a$  und  $e$  gezeichnete Curve entspricht dieser Bedingung nicht, indem die Flächeninhalte der von ihr und der horizontalen Geraden gebildeten Figuren  $abca$  und  $cdec$  augenscheinlich ungleich sind. Um nun zu sehen, wie die Sache sich gestaltet, wenn man zur Bestimmung des Druckes die Gleichung (7) anwendet, habe ich für so viele zwischen  $a$  und  $e$  liegende Werthe von  $v$  die entsprechenden Werthe von  $p$  berechnet, dass daraus der Verlauf der Curve zwischen  $a$  und  $e$  zu ersehen ist. Die dabei erhaltenen Werthe sind, nebst den oben in Tabelle II schon einmal mitgetheilten Werthen von  $p$ , welche sich auf einige ausserhalb des Intervalls  $ae$  liegenden Werthe von  $v$  beziehen, in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

$v$	0,013 768	0,013 037	0,012	0,011	0,010	0,009	0,008
$p$	47,98	49,27	51,12	52,87	54,50	55,84	56,63
$v$	0,007	0,006	0,005	0,004	0,00350	0,00325	0,00300
$p$	56,38	54,28	49,00	38,83	32,05	28,83	26,53
$v$	0,00285	0,00275	0,00250	0,002	0,00182 8	0,002 053 2	
$p$	26,11	26,52	31,52		54,66		74,96

Unter Anwendung dieser Werthe erhält man eine Curve von der auf Taf. II Fig. 2 gegebenen Gestalt. Diese Curve entspricht der obigen Bedingung mit hinlänglicher Genauigkeit.

**II. Ueber eine Beziehung zwischen Druck, Temperatur und Dichte der gesättigten Dämpfe von Wasser und einigen anderen Flüssigkeiten; von A. Winkelmann.<sup>1)</sup>**

§ 10.

Um für die anderen Flüssigkeiten, welche in der Einleitung genannt sind, die aufgestellte Beziehung zu prüfen, ist es zunächst nothwendig, die den einzelnen Drucken entsprechende Temperatur zu bestimmen. Die Temperaturen, welche den Drucken von 1 bis 10 Atmosphären angehören, sind bereits von Zeuner<sup>2)</sup> für sämtliche von mir untersuchte Flüssigkeiten angegeben; für kleinere Drucke habe ich die Temperaturen nach den Angaben Regnault's durch Interpolation berechnet.

Die Dichtigkeit der Dämpfe ist von Zeuner für die hier verlangten Drucke nicht direct bestimmt, indessen hat derselbe mit Hülfe der mechanischen Wärmetheorie nach den Regnault'schen Gleichungen für die Gesamtwärme der Verdampfung Formeln aufgestellt, welche die Dichte der Dämpfe zu berechnen gestatten. Zeuner hat nämlich den Werth von  $Apu$  durch die Gleichung:

$$(VIII) \quad Apu = a + bt^2 + ct^3$$

als Function der Temperatur berechnet. Hier bezeichnet  $u = s - \sigma$  die Differenz zwischen dem specifischen Volumen des Dampfes und dem specifischen Volumen der Flüssigkeit, aus der der Dampf hervorging,  $p$  den Druck in Kilogrammen pro Quadratmeter, welchen der gesättigte Dampf bei der Temperatur  $t$  ausübt, und  $\frac{1}{A} = 424$  das Arbeitsäquivalent für die Wärmeeinheit;  $a, b, c$  sind constante Grössen, welche von Zeuner bestimmt sind. Aus der Gleichung (VIII) lässt sich  $u$  für die verlangten Drucke

1) Fortsetzung von p. 208.

2) Zeuner, Grundzüge der mechan. Wärmetheorie. p. 254. 1866.

berechnen, und mittelst der Kenntniss von  $\sigma$  lässt sich dann die Dichtigkeit des Dampfes  $\gamma$  nach der Gleichung:

$$\gamma = \frac{1}{s} = \frac{1}{u + \sigma}$$

bestimmen.

Um die Dichte des Dampfes, bezogen auf Luft als Einheit, zu erhalten, hat man den Werth  $\gamma$ , welcher sich auf den Druck  $p$  und die Temperatur  $t$  bezieht, durch den Werth  $\gamma_1$  zu dividiren, der durch die Gleichung:

$$\gamma_1 = \frac{p}{29,272 (273 + t)}$$

gewonnen wird.

Diese Werthe der Dampfdichten  $\frac{\gamma}{\gamma_1}$  gründen sich auf die empirischen Formeln, welche Regnault für die Gesamtwärme angegeben hat. Wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, sind aber die Regnault'schen Formeln nicht immer mit seinen Beobachtungen in genügender Uebereinstimmung, und daher habe ich neue Formeln für die Gesamtwärmen berechnet, welche später mitgetheilt werden. Um mit Hülfe dieser neuen Formeln die Dichte der Dämpfe zu erhalten, habe ich folgenden Weg eingeschlagen, welcher im § 9 für das Wasser schon angedeutet ist.

Möge die Gesamtwärme der Verdampfung, welche sich nach der Formel Regnault's bei der Temperatur  $t$  ergibt, mit  $\lambda_1$ , und welche sich nach meiner Formel ergibt, mit  $\lambda_2$  dargestellt werden. Bezeichnet dann  $c$  die specifische Wärme der Flüssigkeit, aus der der Dampf hervorgeht, so erhält man die entsprechenden Verdampfungswärmen  $r_1$  und  $r_2$  durch die Gleichungen:

$$r_1 = \lambda_1 - \int^t c \cdot dt, \quad r_2 = \lambda_2 - \int_0^t c \cdot dt.$$

Da nun nach der mechanischen Wärmetheorie:

$$\frac{r}{u} = A \cdot T \cdot \frac{dp}{dt}$$

ist, so muss bei der Aenderung von  $r_1$  in  $r_2$  der Werth  $u_1$  sich in ein solches  $u_2$  ändern, dass:

$$\frac{r_1}{u_1} = \frac{r_2}{u_2} = A \cdot T \cdot \frac{dp}{dt}.$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass:

$$u_2 = \frac{r_2}{r_1} \cdot u_1.$$

Berechnet man daher die Werthe von  $u_1$  und  $r_1$  nach den Angaben von Zeuner, resp. Regnault, so erhält man mit Hülfe der vorstehenden Gleichung den Werth  $u_2$ , welcher dem nach meiner Formel berechneten Werthe  $r_2$  entspricht. Aus dem Werthe  $u_2$  erhält man dann, wie früher angegeben, die Dichtigkeit des Dampfes, wenn man das spezifische Volumen  $\sigma$  der Flüssigkeit kennt.

Für das spezifische Volumen der Flüssigkeit wurde bisher ein constanter Werth eingesetzt und dabei darauf hingewiesen, dass die Aenderung, welche dasselbe thatsächlich erfährt, von geringem Belange sei. Ich habe aber schon beim Wasser gezeigt, dass die Aenderung des specifischen Volumens in höheren Temperaturen doch einen merklichen Einfluss auf die Dichte des gesättigten Dampfes ausübt, und habe daher auch bei den anderen Dämpfen diese Aenderung berücksichtigt. Bei dieser Rechnung ist es mir nicht entgangen, dass die Beobachtungen über die Volumenänderungen der Flüssigkeiten mit wachsender Temperatur sich jedenfalls auf andere Präparate beziehen, als jene sind, an denen Regnault seine Untersuchungen über Dampfspannungen und Verdampfungswärmen angestellt hat, dass ferner die ersteren Beobachtungen theilweise nur bis zum Siedepunkte der Flüssigkeit reichen. In letzterer Hinsicht ist zu bemerken, dass von Hirn die Ausdehnung einiger Flüssigkeiten bis über den Siedepunkt hinaus verfolgt wurde, und zwar wurde von den hier in Betracht kommenden Flüssigkeiten Aether bis  $120^\circ$ , Schwefelkohlenstoff und Chlorkohlenstoff bis  $150^\circ$  untersucht, die beiden anderen Flüssigkeiten, Aceton und Chloroform, wurden von Kopp, resp. Pierre nur bis zu ihrem Siedepunkte

untersucht. Die in diesem Intervalle geltenden Gleichungen habe ich aber auch in höheren Temperaturen angewandt, weil ich glaube, so doch der Wahrheit näher zu kommen, als wenn ein constantes specifisches Volumen eingesetzt wird.

Es ist hier der Ort, einige Bemerkungen über die nach der mechanischen Wärmetheorie berechneten Werthe der Dampfdichten in niedrigen Drucken zu machen. Die Dichte der Dämpfe im gesättigten Zustande bezogen auf Luft als Einheit muss im allgemeinen grösser als jene im ungesättigten Zustande sein, oder kann dieser höchstens gleich werden. Die Werthe, welche die mechanische Wärmetheorie in niedrigen Drucken liefert, zeigen nun eigenthümliche Veränderungen, welche grossentheils der Ungenauigkeit in der Bestimmung der Verdampfungswärmen bei diesen niedrigen Drucken zuzuschreiben sind. Es wurde diese Sachlage beim Wasser schon im § 7 ausführlich besprochen und gezeigt, warum gerade beim Wasser die beobachteten Werthe eine grosse Unsicherheit einschliessen. Gleichzeitig wurde bemerkt, dass Regnault bei den anderen Flüssigkeiten, welche in den niedrigen Drucken ebenfalls im Calorimeter verdampften, eine Correction für gewisse Umstände angebracht hat, die aber beim Wasser unterlassen wurde. Diese Correction bewirkt, wie Regnault selbst angibt<sup>1)</sup>, dass die schliesslichen Werthe zu klein ausfallen, während sie ohne die Correction sich zu gross ergeben würden. Wenn aber die Werthe für die Verdampfungswärmen zu klein angenommen werden, so werden durch diesen Umstand die berechneten Werthe für die Dampfdichten zu gross, und daher erkennt man, dass die Correction, welche Regnault angebracht hat, nicht die Ursache dafür sein kann, dass thatsächlich die Dampfdichten zu klein werden. Wie die späteren Berechnungen zeigen, und wie dies schon von Herwig<sup>2)</sup> bei seinen Untersuchungen über Dampfdichten hervorgehoben wird, werden

1) Regnault, Mém. de l'Acad. 26. p. 879.

2) Herwig, Pogg. Ann. 137. p. 46. 1869.

nun in der That die Dampfdichten vom Aether, Chloroform und Schwefelkohlenstoff kleiner als die theoretisch berechnete Dampfdichte dieser Stoffe sich ergibt. Beim Aceton und Chlorkohlenstoff ist das Umgekehrte der Fall; hier werden die Dampfdichten grösser, als der theoretisch berechnete Werth, und auch grösser, als sie nach dem Verlaufe der übrigen Werthe sein können. Beim Aceton ergibt sich nämlich für die Dampfdichte bei  $21,17^{\circ}$  ein grösserer Werth als bei  $37,32^{\circ}$  und  $56,32^{\circ}$ ; die beiden letzten Temperaturen entsprechen den Drucken von  $\frac{1}{2}$  und 1 Atmosphäre, während die erstere Temperatur dem Drucke von  $\frac{1}{4}$  Atmosphäre zukommt. Da die Dampfdichte, für jede Temperatur bezogen auf Luft als Einheit, mit abnehmender Temperatur jedenfalls nicht zunehmen kann, so wird man schliessen müssen, dass der bei  $21,17^{\circ}$  berechnete Werth der Dichte zu gross ist, oder dass die beiden anderen Werthe zu klein sind. Bei Chlorkohlenstoff ist das Verhalten ein ganz ähnliches, auch dort findet man bei den niedrigen Temperaturen grössere Werthe für die Dampfdichten als bei den nächst höheren Temperaturen. Bei den zuletzt betrachteten Flüssigkeiten, Aceton und Chlorkohlenstoff, konnte daher die von Regnault an der Gesamtwärme angebrachte Correction den Grund abgeben, warum die Dichten für die entsprechenden Dämpfe bei den unteren Temperaturen zu gross sich ergeben. Wie soll man aber erklären, dass bei den drei anderen Flüssigkeiten das Umgekehrte eintritt? Man wird zuerst geneigt sein, die Ursache dieser Erscheinung in der Schwierigkeit der experimentellen Untersuchung, mit der nothwendig eine gewisse Ungenauigkeit verbunden ist, zu suchen; ohne die Bedeutung dieses Umstandes zu verkennen, glaube ich doch, dass ein anderer Punkt, auf den auch schon Herwig hingewiesen hat, nicht zu übersehen ist.

Regnault hat nämlich die Dichte der Dämpfe im ungesättigten Zustande nicht bestimmt, und daher ist es fraglich, ob dieselben wirklich jene chemische Zusammensetzung hatten, welche bei der Berechnung der theoreti-

sche  
jeden  
zwei  
für d  
als  
such  
hitz

hitz  
da  
zieh  
dur  
lag  
die  
ret  
dic  
zur  
kei  
den

jed  
ke

fin  
tu

de

un

te

re

B



schen Dampfdichte vorausgesetzt wird. Da diese Frage jedenfalls nicht unbedingt zu bejahen ist, so ist es auch zweifelhaft, ob die Werthe der mechanischen Wärmetheorie für die Dampfdichten in niedrigen Drucken wirklich kleiner als jene sind, welche die thatsächlich von Regnault untersuchten Flüssigkeiten bei einer Untersuchung als überhitzte Dämpfe gezeigt haben würden.

Ich bedaure es lebhaft, dass die Dichten der überhitzten Dämpfe nicht von Regnault bestimmt wurden; da gerade diese Dichte in der von mir aufgestellten Beziehung von Bedeutung ist, würde ich für die letztere durch eine solche Bestimmung eine viel sicherere Grundlage der Berechnung gefunden haben. Es blieb mir bei diesem Mangel aber nichts anderes übrig, als die theoretisch bestimmte Dampfdichte als Werth für die Dampfdichte der überhitzten Dämpfe einzusetzen und somit anzunehmen, dass die von Regnault untersuchten Flüssigkeiten wirklich jene Zusammensetzung besaßen, welche der chemischen Formel entspricht.

### § 11.

Im Folgenden gebe ich für jede Flüssigkeit, resp. jeden Dampf zwei Tabellen, deren Einrichtung leicht erkennbar ist.

In den beiden vorderen Reihen der ersten Tabelle finden sich Druck und Temperatur, wie sie den Beobachtungen Regnault's entsprechen.

Die dritte Reihe enthält die Temperatur, welche nach der von mir aufgestellten Beziehung berechnet ist.

Die vierte Reihe gibt die Differenz der beobachteten und berechneten Temperaturen an.

Die fünfte Reihe enthält die Dichte  $d_n$  des gesättigten Dampfes bezogen auf Luft als Einheit, welche zur Berechnung der Temperatur  $t_n$  nach der schon genannten Beziehung gedient hat.

Die sechste und siebente Reihe enthalten die Ver-

dampfungswärmen  $r_1$  und  $r_2$ , welche nach der Formel von Regnault und von mir berechnet sind; die Werthe meiner Formel haben dazu gedient, um die Dichte  $d_n$  zu berechnen.

Die achte Reihe stellt endlich die specifischen Volumina der Flüssigkeit für die in der ersten Reihe angegebenen Temperaturen dar, welche ebenfalls bei der Berechnung der Dichte zur Verwendung kamen.

Die zweite Tabelle bei jeder Flüssigkeit bezieht sich auf die Gesamtwärmen der Verdampfung, welche von Regnault beobachtet wurden. Die erste und zweite Reihe enthalten die Beobachtungen Regnault's, die dritte und vierte Reihe die nach der Formel von Regnault und von mir berechneten Werthe der Gesamtwärmen; die beiden letzten Reihen geben die Differenzen der Berechnung gegenüber der Beobachtung.

Aether. Tabelle I.

Druck des gesättigten Dampfes in Atmos.	Temperaturen des ges. Dampfes			Dichte des ges. Dampfes $d_n$	Verdampfungswärmen nach		Specifisches Volumen
	beobachtet	berechnet	Differenz		Regnault	Winkelmann	
1.	2.	3.	4.	5.	$r_1$ 6.	$r_2$ 7.	8.
$\frac{1}{3}$	-13,86	14,28	+0,42	2,562	—	—	—
$\frac{1}{4}$	0,50	0,62	-0,12	2,562	93,96	93,45	0,00136
$\frac{1}{2}$	16,70	16,98	-0,28	2,562	92,45	91,56	0,00138
1	34,96	34,96	$\pm 0,00$	2,5960	90,20	89,11	0,00143
2	55,87	55,27	+0,60	2,6335	86,92	86,88	0,00148
3	69,61	69,08	+0,53	2,7061	84,38	83,54	0,00152
4	80,21	79,60	+0,61	2,7464	82,19	81,58	0,00156
5	88,96	88,40	+0,56	2,7773	80,13	79,88	0,00159
6	96,47	96,06	+0,38	2,8099	78,45	78,88	0,00162
7	103,08	102,89	+0,19	2,8363	76,81	77,00	0,00164
8	109,00	109,01	-0,01	2,8599	75,27	75,73	0,00166
9	114,37	114,62	-0,25	2,8811	73,82	74,54	0,00168
10	119,39	119,79	-0,40	2,8993	72,42	73,41	0,00170

Die Temperatur in der dritten Reihe ist nach der Formel:

$$t_n = (166,14 + 34,96) n^{\frac{d_n}{4} \cdot A} - 166,14$$

berechnet.

Für  $d$  ist der constante Werth 2,652, welcher der theoretischen Dichte entspricht, einzusetzen;  $A$  ist, wie beim Wasser, = 0,13507.

Bei den Drucken unterhalb einer Atmosphäre ist die theoretische Dichte 2,562, wie aus der fünften Reihe ersichtlich ist, zur Berechnung der Temperaturen eingeführt. Bei dem Drucke von  $\frac{1}{8}$  Atmosphäre, entsprechend der Temperatur  $-13,86^\circ$ , war nämlich die Berechnung der Dichte nicht möglich, ohne das Intervall der Beobachtungen zu überschreiten, da die Gesamtwärmen der Verdampfung nur bis  $-3,7^\circ$  beobachtet wurden. Für die beiden anderen Drucke wurden folgende Werthe für die Dichte gefunden:

$$\begin{array}{ll} 2,547 & \text{bei } \frac{1}{4} \text{ Atmosphäre,} \\ 2,557 & \text{„ } \frac{1}{8} \text{ „} \end{array}$$

Beide Werthe sind kleiner als die theoretische Dampfdichte 2,562 und waren daher nicht anwendbar.

Die Verdampfungswärmen wurden nach folgenden Gleichungen bestimmt, in denen  $r_1$  sich auf die Formel von Regnault und  $r_2$  auf jene von mir bezieht.

$$\begin{array}{l} r_1 = 94,00 - 0,07901 t - 0,000 851 4 t^2 \\ r_2 = 93,50 - 0,1082 t - 0,000 503 3 t^2 \end{array}$$

Das specifische Volumen ist nach den Beobachtungen Hirn's durch folgende Gleichung berechnet:

$$v_t = v_0 (1 + at + bt^2 - ct^3 + dt^4),$$

in welcher:

$$\begin{array}{ll} \log a = 0,12997 - 3 & \log c = 0,53769 - 8 \\ \log b = 0,81651 - 6 & \log d = 0,52853 - 10 \quad \text{ist.} \end{array}$$

Die Differenzen in der vierten Reihe zeigen eine solche Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Berechnung, dass  $0,61^\circ$  nicht überschritten wird. Nach Mittheilung der betreffenden Tabellen für die anderen Flüssigkeiten werde ich auf die vorhandenen Differenzen nochmals zurückkommen.

## Aether. Tabelle II.

Temperatur 1.	Gesamtwärmen			Differenz von	
	beobachtet 2.	Regnault 3.	berechnet von Winkelmann 4.	2 u. 3	2 u. 4
-3,7	92,235	92,328	91,840	-0,093	+0,395
7,51	95,370	97,348	96,649	-1,978	-1,279
12,90	97,282	99,713	98,895	-2,431	-1,613
15,50	98,801	100,841	99,973	-2,040	-1,174
17,15	101,278	101,554	100,657	-0,276	+0,621
21,95	104,366	103,609	102,638	+0,657	+1,628
34,83	109,117	109,000	107,905	+0,117	+1,212
90,05	128,900	130,017	129,706	-1,117	-0,806
93,85	130,880	131,339	131,165	-0,459	-0,285
108,80	138,196	136,384	136,848	+1,812	+1,248
120,90	140,781	140,285	141,334	+0,496	-0,553
Mittlere Differenz ohne Rücksicht auf das Vorzeichen				1,04	0,98
" " mit " " " "				-0,48	-0,05

Die Werthe in den Reihen 3 und 4 sind nach folgenden Gleichungen berechnet, in denen sich  $\lambda_1$  auf die Formel Regnault's und  $\lambda_2$  auf meine Formel bezieht.

$$\lambda_1 = 94,00 + 0,45000 t - 0,000 555 6 t^2$$

$$\lambda_2 = 93,50 + 0,42083 t - 0,000 208 3 t^2$$

Aus den Differenzen in den beiden letzten Reihen der obigen Tabelle erkennt man, dass meine Formel sich den Beobachtungen Regnault's besser anschliesst als die von Regnault selbst aufgestellte Formel; ohne Rücksicht auf das Vorzeichen sind die mittleren Differenzen nicht sehr verschieden, mit dieser Rücksicht ist bei meiner Formel die mittlere Differenz fast zehnmal so klein als bei der Regnault'schen Formel.

## Aceton. Tabelle I.

Druck des gesättigten Dampfes in Atmos. 1.	Temperaturen des ges. Dampfes			Dichte des ges. Dampfes $d_s$ 5.	Verdampfungswärmen nach		Specifisches Volumen 8.
	beobachtet 2.	berechnet 3.	Differenz 4.		Regnault $r_1$ 6.	Winkelmann. $r_2$ 7.	
$\frac{1}{4}$	21,17	20,94	+0,23	2,008	137,13	134,19	0,0012
$\frac{1}{2}$	37,32	37,43	-0,11	2,0465	134,01	129,94	0,00129
1	56,32	56,32	$\pm 0,00$	2,0542	129,73	125,03	0,00134
2	78,03	77,52	+0,51	2,0923	124,01	119,56	0,00138
3	92,30	91,54	+0,76	2,1244	119,81	116,05	0,00141

Aceton. Tabelle I. (Fortsetzung.)

Druck des gesättigten Dampfes in Atmos. 1.	Temperaturen des ges. Dampfes			Dichte des ges. Dampfes $d_n$ 5.	Verdampfungswärmen nach		Specificisches Volumen 8.
	beobachtet 2.	berechnet 3.	Differenz 4.		Regnault $r_1$ 6.	Winkelm. $r_2$ 7.	
4	103,26	102,37	+0,89	2,1521	116,31	113,38	0,00145
5	112,30	111,55	+0,75	2,1830	113,27	111,23	0,00147
6	120,08	119,50	+0,58	2,2082	110,53	109,39	0,00149
7	126,95	126,63	+0,32	2,2323	108,03	107,80	0,00151
8	133,15	133,15	$\pm 0,00$	2,2548	105,68	106,35	0,00153
9	138,81	139,15	-0,34	2,2753	103,49	105,05	0,00155
10	144,05	144,65	-0,60	2,2924	101,41	103,85	0,00157

Die Temperatur in der dritten Reihe ist nach der Formel:

$$t_n = (150,89 + 56,32) n^{\frac{d_n}{d}} \cdot A - 150,89$$

berechnet.

Für  $d$  ist der constante Werth 2,008, welcher der theoretischen Dichte entspricht, einzusetzen.  $A$  ist, wie beim Wasser, = 0,13507.

Bei dem Drucke von  $\frac{1}{4}$  Atmosphäre ist die theoretische Dichte zur Berechnung der Temperatur eingeführt. Die Berechnung nach der mechanischen Wärmetheorie ergab den Werth 2,0585, welcher grösser ist als die beiden Werthe 2,0465 und 2,0542, die den Drucken von  $\frac{1}{2}$ , resp. 1 Atmosphäre entsprechen; es wurde daher der Werth 2,0585 verworfen.

Die Verdampfungswärmen wurden nach folgenden Gleichungen berechnet:

$$r_1 = 140,5 - 0,13999 t - 0,000 912 5 t^2$$

$$r_2 = 139,9 - 0,27287 t + 0,000 157 1 t^2$$

Das specificische Volumen ist nach den Beobachtungen von Kopp durch folgende Gleichung bestimmt:

$$v_t = v_0 (1 + at + bt^2 + ct^3),$$

$$\text{wo} \quad \log a = 0,12969 - 3, \quad \log b = 0,41647 - 6, \\ \log c = 0,06296 - 8.$$

Die Differenzen in der vierten Reihe zeigen im Maximum den Werth 0,89°.

Aceton. Tabelle II.

Temperatur 1.	Gesamtwärmen berechnet von			Differenz von	
	beobachtet 2.	Regnault 3.	Winkelmann 4.	2 u. 3	2 u. 4
-3,1	137,54	139,37	139,12	-1,83	-1,58
8,1	140,73	143,43	141,83	-2,70	-1,10
21,0	148,21	147,96	145,04	+0,25	+3,17
56,3	153,65	159,50	154,80	-5,85	-1,15
56,8	159,74	159,65	154,95	+0,09	+4,79
86,7	169,85	168,39	164,29	+1,46	+5,56
115,7	168,47	175,91	174,33	-7,44	-5,86
131,3	177,78	179,72	180,10	-1,94	-2,32
146,9	186,21	183,20	186,17	+3,01	+0,04
Mittlere Differenz ohne Rücksicht auf das Vorzeichen				2,73	2,84
" " mit " " " "				-1,65	+0,17

Die Werthe in den Reihen 3 und 4 sind nach folgenden Gleichungen berechnet:

$$\lambda_1 = 140,5 + 0,36644 t - 0,000 516 t^2$$

$$\lambda_2 = 139,9 + 0,23356 t + 0,000 553 58 t^2.$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man, dass, während bei Regnault das dritte Glied der Gleichung ein negatives Vorzeichen besitzt, bei meiner Formel dasselbe positiv auftritt. Die Differenzen in den beiden letzten Reihen beweisen aber zur Genüge, dass meine Formel sich den Beobachtungen besser anschliesst; die grosse, positive Differenz 3,01, welche sich bei Regnault für den letzten Werth findet, weist darauf hin, dass eine Formel mit positivem Gliede den Beobachtungen besser entspricht. Auch hier ist die mittlere Differenz mit Rücksicht auf das Vorzeichen, ebenso wie beim Aether, nach Regnault's Formel fast zehnmal so gross als nach meiner Formel. Die mittlere Abweichung ohne Rücksicht auf das Vorzeichen ist nach beiden Formeln recht gross; die Ursache hiervon ist die, dass für nahe zusammenliegende Temperaturen (56,3° und 56,8°) sehr verschiedene Werthe (153,6 und 159,7) gefunden wurden, und dass ferner für weit voneinander entfernte Temperaturen (86,7° und 115,7°) Werthe beobachtet wurden (169,8 und 168,4), die nicht einmal dem Sinne der Temperaturänderung entsprechen.

Chloroform. Tabelle I.

Druck des gesättigten Dampfes in Atmos.	Temperaturen des ges. Dampfes			Dichte des ges. Dampfes $d_n$	Verdampfungswärmen nach		Specifisches Volumen
	beob- achtet	be- rechnet	Differenz		Regnault $r_1$	Winkelmann $r_2$	
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
$\frac{1}{4}$	23,79	20,84	+2,95	4,138	64,72	64,90	0,000 65
$\frac{1}{2}$	40,67	39,59	+1,08	4,138	63,04	63,28	0,000 65
1	60,18	60,18	$\pm 0,00$	4,1460	61,11	61,35	0,000 713
2	82,59	83,24	-0,65	4,2003	58,83	58,98	0,000 743
3	97,55	98,14	-0,59	4,2535	57,27	57,21	0,000 766
4	109,04	109,49	-0,45	4,2864	56,05	55,99	0,000 786
5	118,56	118,92	-0,36	4,3232	55,05	54,87	0,000 804
6	126,78	127,02	-0,24	4,3556	54,15	53,88	0,000 820
7	134,08	134,20	-0,12	4,3860	53,37	52,99	0,000 835
8	140,66	140,68	-0,02	4,4144	52,63	52,17	0,000 850
9	146,70	146,62	+0,08	4,4432	52,00	51,39	0,000 864
10	152,34	152,13	+0,21	4,4681	51,37	50,67	0,000 877

Die Temperatur in der dritten Reihe ist nach der Formel:

$$t_n = (170,22 + 60,18) n^{\frac{d_n}{d}} \cdot A - 170,22$$

berechnet.

Für  $d$  ist der constante Werth 4,138, welcher der theoretischen Dichte entspricht, einzusetzen.  $A$  ist, wie beim Wasser, = 0,13507.

Bei den Drucken von  $\frac{1}{2}$  und  $\frac{1}{4}$  Atmosphäre ist die theoretische Dichte zur Berechnung der Temperaturen eingeführt, weil sich hier Werthe ergaben, welche kleiner als die theoretische Dichte sind, nämlich bei dem Drucke

von  $\frac{1}{2}$  Atmosphäre 4,1186

„  $\frac{1}{4}$  „ 4,1108

Die Verdampfungswärmen wurden nach den folgenden Gleichungen berechnet:

$$r_1 = 67,00 - 0,09485 t - 0,000 050 7 t^2$$

$$r_2 = 67,00 - 0,08519 t - 0,000 144 4 t^2$$

Das specifische Volumen ist bei Drucken unterhalb 1 Atmosphäre constant = 0,00065 gesetzt, oberhalb dieser Drucke wurde dasselbe nach Beobachtungen von Pierre durch folgende Gleichung bestimmt:

$$v_t = v_0 (1 + at + bt^2 + ct^3),$$

wo  $\log a = 0,04420 - 3$        $\log b = 0,66885 - 6$   
 $\log c = 0,24130 - 8.$

Die Differenzen der vierten Reihe zwischen den beobachteten und berechneten Temperaturen sind oberhalb des Druckes von 1 Atmosphäre nur gering und überschreiten nirgends  $0,65^\circ$ ; unterhalb dieses Druckes werden die Differenzen aber sehr beträchtlich und erreichen bei  $23,79^\circ$  fast  $3^\circ$ , auf diese werden wir später zurückkommen.

Chloroform. Tabelle II.

Temperatur 1.	Gesamtwärmen			Differenz von	
	beobachtet 2.	berechnet von Regnault 3.	Winkelmann 4.	2 u. 3	2 u. 4
-5,4	66,07	66,26	66,21	-0,19	-0,14
6,0	68,06	67,82	67,88	+0,24	+0,18
11,6	68,43	68,59	68,70	-0,16	-0,27
15,7	69,33	69,16	69,29	+0,17	+0,04
23,0	71,46	70,17	70,34	+1,29	+1,12
41,1	73,44	72,65	72,89	+0,79	+0,55
60,3	76,33	75,29	75,55	+1,04	+0,80
87,6	77,98	79,05	79,15	-1,07	-1,23
109,4	81,90	82,04	81,88	-0,14	+0,02
121,2	85,27	83,67	83,46	+1,60	+1,81
134,5	84,688	85,49	85,10	-0,80	-0,41
137,7	85,106	85,93	85,49	-0,82	-0,38
159,0	86,866	88,86	87,83	-2,00	-0,97
• Mittlere Differenz ohne Rücksicht auf das Vorzeichen				0,78	0,64
" " mit " " " "				-0,01	+0,08

Die Werthe in den Reihen 3 und 4 sind nach folgenden Gleichungen berechnet:

$$\lambda_1 = 67,00 + 0,1375 t$$

$$\lambda_2 = 67,00 + 0,14716 t - 0,000 093 7 t^2$$

Regnault stellt die Gesamtwärme durch eine Formel mit nur zwei Constanten dar, während meine Formel drei Constanten enthält. Chloroform ist ausser dem Wasser die einzige Flüssigkeit, für welche Regnault die Gesamtwärme durch eine gerade Linie dargestellt hat. Eine genauere Untersuchung lässt indess erkennen, dass derselbe wohl nur durch ein Versehen beim Chloroform hierzu geführt wurde.



Regnault gibt nämlich in seinen Beobachtungen für den letzten Werth der Gesamtwärme bei der Temperatur  $159,0^{\circ}$  nicht den Werth 86,866, welcher sich in obiger Tabelle findet, an, sondern statt dessen 89,866. Es lässt sich aber zeigen, dass hier ein Fehler in der Berechnung vorliegt, und dass der richtige Werth in der That 86,866 ist. Der von Regnault angegebene Mittelwerth 89,866 ist aus Série X p. 842, und zwar aus den Werthen für X, nämlich:

86,587; 85,458; 86,554

abgeleitet. Das Mittel dieser Werthe ist indessen nicht:

89,866, sondern 86,166.

Untersucht man nun aber die einzelnen Werthe von X, so findet man, dass der zweite Werth 85,458 nicht richtig aus dem Werthe  $\lambda = 81,359$  berechnet ist, sondern dass unter Annahme von 81,359 für  $\lambda$  sich 87,458 für X ergibt; somit sind die drei richtigen Werthe von X die folgenden:

86,587; 87,458; 86,554.

Das Mittel aus diesen Beobachtungen ist nun 86,866, und dieser Werth ist statt des Werthes 89,866, welchen Regnault berechnet hat, einzusetzen.

Regnault bemerkt dann p. 849 über die Gesamtwärme des Chloroform: „En portant sur une feuille quadrillée les points, qui sont donnés par les coordonnées de ce tableau, on reconnaît, qu'ils ne représentent pas une courbe continue, comme ceux, qui sont fournis par les expériences faites sur les autres substances volatiles. On pouvait s'y attendre à cause de la non-homogénéité de la substance; les points oscillent autour d'une ligne droite . . . . dont ils s'éloignent d'ailleurs très-peu.“

Berücksichtigt man aber, dass der letzte Werth für die Temperatur  $159,0^{\circ}$  nicht 89,866, sondern 86,866 ist, so sieht man, dass eine gerade Linie die Beobachtungen nicht gut darstellt, sondern eine Formel mit drei Constanten zu Hülfe zu nehmen ist.

Chlorkohlenstoff. Tabelle I.

Druck des gesättigten Dampfes in Atmos. 1.	Temperaturen des ges. Dampfes			Dichte des ges. Dampfes $d_n$ 5.	Verdampfungswärmen nach		Specifisches Volumen 8.
	beobachtet 2.	berechnet 3.	Differenz 4.		Regnault $r_1$ 6.	Winkelm. $r_2$ 7.	
$\frac{1}{16}$	6,69	4,69	+2,00	5,332	51,64	51,72	0,000 61
$\frac{1}{8}$	20,86	20,20	+0,66	5,332	50,81	51,04	0,000 61
$\frac{1}{4}$	36,84	37,31	-0,47	5,3381	49,74	49,95	0,000 61
$\frac{1}{2}$	55,26	55,67	-0,41	5,4132	48,34	48,25	0,000 61
1	76,52	76,52	$\pm 0,00$	5,5426	46,50	45,94	0,000 674
2	101,37	100,96	+0,41	5,7533	44,06	43,05	0,000 695
3	117,90	117,58	+0,32	5,9035	42,25	41,14	0,000 716
4	130,50	130,08	+0,42	5,9622	40,78	39,78	0,000 731
5	141,18	141,19	-0,01	6,0777	39,47	38,74	0,000 745
6	150,19	150,14	+0,05	6,1193	38,31	37,95	0,000 756
7	158,12	157,77	+0,35	6,1379	37,25	37,34	0,000 768

Die Temperatur in der dritten Reihe ist nach der Formel:

$$t_n = (153,45 + 76,52) n^{\frac{d_n}{d} \cdot A} - 153,45$$

berechnet.

Für  $d$  ist der constante Werth 5,332, welcher der theoretischen Dichte entspricht, einzusetzen.  $A$  ist wie beim Wasser = 0,13507.

Bei den Drucken von  $\frac{1}{16}$  und  $\frac{1}{8}$  Atmosphäre ist die theoretische Dichte zur Berechnung der Temperatur eingeführt, weil die Berechnung folgende Werthe lieferte:

5,4840 bei dem Drucke von  $\frac{1}{16}$  Atmosphäre,

5,3774 " " " "  $\frac{1}{8}$  " "

Beide Werthe sind grösser als die Dichte bei dem Drucke von  $\frac{1}{4}$  Atmosphäre, und der erste ist auch grösser als die Dichte bei dem Drucke von  $\frac{1}{2}$  Atmosphäre; daher müssen diese Werthe unrichtig sein, wenn jene bei den höheren Drucken als richtig angenommen werden.

Die Verdampfungswärmen wurden nach folgenden Gleichungen berechnet:

$$r_1 = 52,0 - 0,05173 t - 0,000 262 6 t^2$$

$$r_2 = 51,90 - 0,01931 t - 0,001 050 5 t^2 + 0,000 003 733 t^3$$

Das specifische Volumen ist bei Drucken unterhalb einer Atmosphäre constant gleich 0,00061 gesetzt, oberhalb die-

ses Druckes ist dasselbe nach Hirn durch die folgende Gleichung:

$$v_t = v_0 (1 + at + bt^2 - ct^3 + dt^4)$$

bestimmt, wo:

$$\log a = 0,02824 - 3$$

$$\log c = 0,17435 - 8$$

$$\log b = 0,55206 - 6$$

$$\log d = 0,93034 - 11.$$

Die Differenzen der dritten Reihe zwischen den beobachteten und berechneten Temperaturen sind gering mit Ausnahme der ersten Differenz 2,00, welche sich bei dem kleinsten Drucke zeigt; dieselbe Erscheinung wurde auch beim Chloroform hervorgehoben. Die Temperaturen sind in der obigen Tabelle nicht weiter als bis zu dem Drucke von 7 Atmosphären geführt, weil die Beobachtungen Regnault's nicht weiter reichen.

Chlorkohlenstoff. Tabelle II.

Temperatur	Gesamtwärmen			Differenz von	
	beobachtet	berechnet von		2 u. 3	2 u. 4
1.	2.	Regnault 3.	Winkelmann 4.		
8,0	52,42	53,16	53,28	-0,74	-0,84
20,1	54,62	54,87	55,13	-0,25	-0,51
34,2	56,89	56,80	57,03	+0,09	-0,14
45,0	58,69	58,23	58,34	+0,46	+0,35
57,3	60,60	59,84	59,69	+0,76	+0,91
76,4	62,30	62,17	61,61	+0,13	+0,71
126,9	66,87	67,79	66,73	-0,92	+0,14
155,2	70,24	70,46	70,47	-0,22	-0,23
162,9	71,12	71,26	71,67	-0,14	-0,55
Mittlere Differenz ohne Rücksicht auf das Vorzeichen				0,41	0,49
" " mit " " " "				-0,09	-0,02

Die Werthe in den Reihen 3 und 4 sind nach folgenden Gleichungen berechnet:

$$\lambda_1 = 52,0 + 0,14625 t - 0,000 172 t^2$$

$$\lambda_2 = 51,90 + 0,17867 t - 0,000 959 9 t^2 + 0,000 003 733 t^3$$

Die Differenzen in den beiden letzten Reihen zeigen keine besonderen Unterschiede; die mittleren Differenzen sind nach beiden Formeln nahezu gleich. Ich habe hier nur deshalb eine neue Formel, welche sich ebenso gut wie die Regnault'sche den Beobachtungen anschliesst, aufgestellt,

um für die Dichten Werthe zu erhalten, welche für die zu berechnenden Temperaturen geringere Abweichungen zeigen.

Schwefelkohlenstoff. Tabelle I.

Druck des gesättigten Dampfes in Atmos.	Temperaturen des ges. Dampfes			Dichte des ges. Dampfes $d_n$	Verdampfungswärmen nach		Specificsches Volumen
	beob- achtet	be- rechnet	Differenz		Begnault $r_1$	Winkelm. $r_2$	
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
$\frac{1}{8}$	-6,37	-6,22	-0,15	2,631	90,60	89,91	0,00077
$\frac{1}{4}$	8,90	9,66	-0,76	2,631	89,17	88,83	0,00077
$\frac{1}{2}$	26,38	27,03	-0,65	2,6424	87,30	87,07	0,00077
1	46,25	46,25	$\pm 0,00$	2,7045	84,82	84,49	0,00082
2	69,25	68,55	+0,70	2,7821	81,45	80,85	0,00084
3	84,45	83,55	+0,90	2,8457	78,95	78,22	0,00086
4	96,17	95,44	+0,73	2,9043	76,95	76,11	0,00087
5	105,86	105,18	+0,68	2,9407	75,02	74,35	0,00088
6	114,21	113,91	+0,30	2,9836	73,37	72,83	0,00089
7	121,59	121,59	$\pm 0,00$	3,0168	71,85	71,49	0,00090
8	128,25	128,54	-0,29	3,0445	70,43	70,29	0,00091
9	134,34	134,90	-0,56	3,0697	69,11	69,23	0,00092
10	139,97	140,72	-0,75	3,0906	67,84	68,25	0,00093

Die Temperatur in der dritten Reihe ist nach der Formel:

$$t_n = (168,03 + 46,25) n^{\frac{d_n}{d}} \cdot A - 168,03$$

berechnet.

Für  $d$  ist dann der constante Werth 2,631, welcher der theoretischen Dichte entspricht, einzusetzen.  $A$  ist, wie beim Wasser, = 0,13507.

Bei den Drucken von  $\frac{1}{8}$  und  $\frac{1}{4}$  Atmosphäre ist die theoretische Dichte 2,631 zur Berechnung der Temperatur eingeführt; bei diesen Drucken ergab die Rechnung Werthe, welche kleiner als die theoretische Dichte sind, nämlich:

2,6306 bei  $\frac{1}{8}$  Atmosphäre

2,6286 „  $\frac{1}{4}$  „

Die Verdampfungswärmen wurden nach folgenden Gleichungen berechnet:

$$r_1 = 90,00 - 0,08922 t - 0,000 493 8 t^2$$

$$r_2 = 89,50 - 0,06530 t - 0,001 097 6 t^2 + 0,000 003 424 5 t^3.$$

Das spezifische Volumen ist bei den Drucken unterhalb einer Atmosphäre gleich 0,00077 gesetzt; oberhalb

dieses Druckes ist dasselbe nach den Beobachtungen von Hirn durch folgende Gleichung bestimmt:

$$v_t = v_0 (1 + at + bt^2 + ct^3 + dt^4)$$

$$\text{wo } \log a = 0,06744 - 3 \quad \log c = 0,90950 - 10$$

$$\log b = 0,21722 - 6 \quad \log d = 0,78494 - 11.$$

Die Differenzen in der vierten Reihe zwischen den beobachteten und berechneten Temperaturen zeigen, dass die grösste Differenz  $0,90^\circ$  ist, und dass im übrigen dieselben mehrfach bis zu  $0,7^\circ$  reichen.

Schwefelkohlenstoff. Tabelle II.

Temperatur 1.	beobachtet 2.	Gesamtwärmen berechnet von		Differenz von	
		Regnault 3.	Winkelmann 4.	2 u. 3	2 u. 4
-0,25	89,29	90,04	89,54	-0,75	-0,25
8,70	89,70	91,24	90,94	-1,54	-1,24
14,75	90,64	92,06	91,80	-1,42	-1,16
21,60	91,63	92,96	92,72	-1,33	-1,09
23,90	91,87	93,42	93,02	-1,55	-1,15
46,60	96,80	95,91	95,55	+0,89	+1,25
75,60	98,93	98,69	98,02	+0,24	+0,91
93,00	99,16	100,43	99,70	-1,27	-0,54
101,80	100,59	100,59	99,88	$\pm 0,00$	+0,71
111,80	100,88	101,17	100,59	-0,29	+0,29
123,30	101,56	101,73	101,42	-0,17	+0,13
142,80	102,48	102,44	103,02	+0,04	-0,54
Mittlere Differenz ohne Rücksicht auf das Vorzeichen				0,79	0,77
" " mit " " " "				-0,60	-0,22

Die Werthe in den Reihen 3 und 4 sind nach den folgenden Gleichungen berechnet:

$$\lambda_1 = 90,0 + 0,14601 t - 0,000 412 3 t^2$$

$$\lambda_2 = 89,5 + 0,16993 t - 0,001 016 1 t^2 + 0,000 003 424 5 t^3.$$

Aus den Differenzen der beiden letzten Reihen sieht man, dass meine Formel die Beobachtungen besser darstellt, als die Regnault'sche Formel; die grössten Differenzen bei Regnault sind entschieden grösser, als die grössten Differenzen nach meiner Formel, und es ist ferner die mittlere Differenz mit Rücksicht auf das Vorzeichen nach meiner Formel nur etwa  $\frac{1}{3}$  von jener bei Regnault.

## § 12.

Nachdem im Vorstehenden die Resultate der Berechnung mitgetheilt sind, ist die Frage zu beantworten, ob die Differenzen, welche sich zwischen den beobachteten und den nach meiner Beziehung berechneten Werthen der Temperatur bei verschiedenen Drucken ergeben haben, durch Beobachtungsfehler erklärt werden können. Ich glaube, bei dieser Untersuchung von dem Wasser absehen zu dürfen, da durch die Tabelle X bewiesen ist, dass die Unterschiede von Beobachtung und Berechnung im Mittel nur  $0,05^\circ$  betragen, also äusserst geringfügig sind. Das Wasser bietet auch einen besondern Vortheil gegenüber den anderen Flüssigkeiten dadurch dar, dass die Ausgangstemperatur  $100^\circ$ , welche dem Drucke einer Atmosphäre entspricht, nicht durch Beobachtung gefunden ist, sodass der Gedanke einer fehlerhaften Bestimmung hier ganz ausgeschlossen ist. Aus den Formeln, welche ich für die anderen Flüssigkeiten aufgestellt habe, ebenso wie aus den entsprechenden Tabellen ersieht man, dass dieselben die von Regnault für den Druck von einer Atmosphäre ermittelten Temperaturen als richtig angenommen haben, obschon für diesen Druck nicht mehr Beobachtungen und infolge dessen auch keine grössere Sicherheit in der Bestimmung der Temperatur vorliegen, als bei anderen Drucken. Ein Fehler in dieser Temperatur macht sich aber auch für die Temperaturberechnung bei anderen Drucken geltend.

Um über die vorhandenen Differenzen zwischen Beobachtung und Berechnung ein sicheres Urtheil zu gewinnen, hat man zwei Grössen besonders zu betrachten: zunächst die Dichtigkeit des Dampfes und damit den Einfluss, welchen dieselbe auf die Berechnung der Temperatur ausübt, ferner die den einzelnen Drucken entsprechenden Temperaturen selbst, insofern bei Beobachtung derselben Fehler möglich sind.

Was die erste Grösse betrifft, so hängt diese, wie schon erwähnt wurde, von der Gesamtwärme der Verdampfung der Flüssigkeit und ferner von der specifischen Wärme der

letz  
die  
Um  
lang  
Tem  
lent  
Bet  
Bed

solo  
thei  
Beo  
die  
der  
der  
pro  
dan  
in  
Ein  
die

Da  
Ge  
Flü  
Re  
der  
un  
tur  
hö  
ber  
die  
wä  
no  
fis  
we  
re  
de

letztern ab, da zur Bestimmung der Verdampfungswärme die specifische Wärme verwandt wird. Die beiden anderen Umstände, welche für die Berechnung der Dichte von Belang sind, nämlich der Zusammenhang von Druck und Temperatur einerseits und die Grösse des Arbeitsäquivalents der Wärmeeinheit andererseits, will ich hier ausser Betracht lassen, da sie für unsere Frage ohne grössere Bedeutung sind.

Die Gesamtwärme der Verdampfung ist mit einer solchen Genauigkeit bestimmt, dass, wie aus den mitgetheilten Tabellen hervorgeht, die mittlere Differenz zwischen Beobachtung und Berechnung 0,8 bis 1,6 Proc. beträgt. Da die Verdampfungswärmen kleiner als die Gesamtwärmen der Verdampfung sind, so haben die ersteren, einzig in Folge der Ungenauigkeit der Gesamtwärmen, einen noch grössern procentigen Fehler. Ein Fehler von 1 Proc. in der Verdampfungswärme zieht nun einen fast gleich grossen Fehler in der Dichte nach sich, und dieser hat einen verschiedenen Einfluss auf die Temperaturbestimmung, wie wir am Schlusse dieses Paragraphen zeigen werden.

Ein anderer Punkt für die Fehlerbestimmung in der Dampfdichte, auf den meiner Ansicht nach bisher zu wenig Gewicht gelegt ist, ist in der specifischen Wärme der Flüssigkeit begründet. Diese specifischen Wärmen sind von Regnault nur in den tieferen Temperaturen, etwa bis zu den normalen Siedepunkten der Flüssigkeiten bestimmt, und man geht daher schon aus dem Rahmen der Beobachtungen hinaus, wenn man die specifische Wärme in den höheren Temperaturen aus den Beobachtungen Regnault's berechnet. Es geschieht dies aber, sobald man für Drucke, die grösser als 1 Atmosphäre sind, aus den Gesamtwärmen die Verdampfungswärmen ableitet. Dazu kommt noch, dass die Beobachtungen Regnault's für die specifischen Wärmen nicht zahlreich sind, und ferner, dass diese wenigen Beobachtungen nicht immer gleichmässig zur Berechnung der specifischen Wärme und der Abhängigkeit der letztern von der Temperatur benutzt worden sind. Um

dieses Urtheil zu begründen und die Genauigkeitsgrenze festzuhalten, welche von Regnault erreicht worden, werde ich die einzelnen Flüssigkeiten an der Hand der Regnault'schen Beobachtungen betrachten.

1. Aether.<sup>1)</sup> Bei demselben liegen vier Beobachtungen vor, welche die mittlere specifische Wärme zwischen den Temperaturen:

I.	II.	III.	IV.
— 29,80	— 24,33	32,05	31,94
7,65	5,89	6,71	5,31

liefern. Von diesen werden die Beobachtungen I einerseits und der Mittelwerth von III und IV andererseits benutzt, um in der Gleichung:

$$Q = A \cdot t + B \cdot t^2$$

(wo  $Q$  die Wärme bezeichnet, welche nothwendig ist, um die Gewichtseinheit von  $0^\circ$  bis  $t^\circ$  zu erwärmen) die beiden Constanten  $A$  und  $B$  zu berechnen. Regnault erhielt:

$$A = 0,52899 \quad B = 0,000\,295\,9.$$

Der Werth II ist bei dieser Berechnung unbenutzt geblieben; würde man nun statt des Werthes I diesen Werth II zur Bestimmung der Constanten benutzen, so erhielte man:

$$A' = 0,53142 \quad B' = 0,000\,232\,1.$$

Diese Constanten zeigen zwar nur geringe Unterschiede gegenüber den von Regnault erhaltenen Werthen, indessen ist der Einfluss dieses Unterschiedes in höheren Temperaturen nicht unbedeutend. Wählt man die Temperatur  $119,39^\circ$ , welche einem Drucke von 10 Atmosphären beim Aetherdampf entspricht, so erhält man nach der Berechnung von Regnault:

$$Q = 67,380;$$

und nach der zweiten Berechnung mittelst  $A'$  und  $B'$ :

$$Q' = 66,761.$$

Mit dem ersten Werthe wird die Dichte des Aetherdampfes bei  $119,39^\circ$ : 2,8990,

1) Regnault, Mém. de l'Acad., 26. p. 275.



und mit dem zweiten Werthe:

2,8751.

Der Werth 2,8990 für die Dichte bei 119,39 ist jener, welcher in der Formel zur Berechnung der Temperatur eingeführt ist und die Temperatur  $120,05^{\circ}$  geliefert hat; nimmt man jetzt den Werth 2,8751 für die Dichte und berechnet nach derselben Formel die Temperatur, so erhält man  $119,21^{\circ}$ . Dieses Resultat zeigt, welchen Einfluss die specifische Wärme der Flüssigkeit bei der Berechnung der Dichte des Dampfes ausübt, und welche Bedeutung die letztere auf die Temperaturbestimmung hat.

Der Grund, warum Regnault nicht auch die Beobachtung II zur Bestimmung der specifischen Wärme des Aethers verwerthet hat, scheint der zu sein, dass die beiden Temperaturen  $-29,80^{\circ}$  und  $-24,33$  in den beiden ersten Beobachtungen um mehrere Grade auseinander liegen. Es ist dieser Grund zwar nicht von Regnault selbst angegeben, eine Vergleichung der Rechnungsweise bei den verschiedenen Flüssigkeiten lässt denselben aber vermuthen. Es ist einleuchtend, dass man sehr wohl beide Beobachtungen I und II zur Bestimmung der Constanten benutzen kann, und hätte ich die Rechnung auch durchgeführt und für die Bestimmung der Dichte verwerthet, wenn nicht eine bestimmte Ueberlegung mich davon abgehalten hätte. Die genauere Bestimmung der Constanten der specifischen Wärme hätte doch nur eine wirkliche Bedeutung innerhalb der Temperaturgrenzen gehabt, welche die Beobachtungen Regnault's umfassen, also beim Aether bis  $32^{\circ}$ ; in den höheren Temperaturen wäre die Unsicherheit in Bezug auf die specifische Wärme doch grösstentheils bestehen geblieben, und hier wäre eine grössere Sicherheit gerade am meisten von Werth gewesen.

Aus dem Vorstehenden geht jedenfalls hervor, dass in der specifischen Wärme des Aethers in den höheren Temperaturen, auch wenn man davon absieht, dass die Beobachtungen nicht so weit reichen, eine Ungenauigkeit von etwa 0,5 bis 1,0 Proc. besteht, und dass diese Unge-

naugigkeit für die Temperaturbestimmung nach meiner Formel eine Unsicherheit bis zu  $0,8^\circ$  in den hohen Temperaturen nach sich zieht.

2. Aceton.<sup>1)</sup> Bei dieser Flüssigkeit liegen nur zwei Versuche vor, welche den Temperaturgrenzen:

I.	II.
— 21,71	53,81
8,99	9,51

entsprechen, und durch welche die beiden Constanten berechnet wurden.

3. Chloroform.<sup>2)</sup> Hier liegen fünf Versuche von Regnault vor und entsprechen dieselben den folgenden Temperaturgrenzen:

I.	II.	III.	IV.	V.
— 31,99	— 29,28	53,82	61,15	55,31
7,47	5,98	4,93	6,65	6,62

Von diesen fünf Versuchen wurden nur drei, nämlich I, III, V, zur Berechnung der Constanten  $A$  und  $B$  benutzt und:

$$A = 0,23235 \quad B = 0,000\,050\,715$$

gefunden.

Berechnet man mit diesen Werthen die Wärmemengen, welche den Versuchen II und IV entsprechen, so erhält man folgende Werthe, denen die Beobachtungen beige-fügt sind:

	Wärmemenge $Q$		
	beobachtet	berechnet	Differenz
II.	7,9260	8,1509	— 0,2249
IV.	12,761	12,851	— 0,090

Man ersieht hieraus, dass bei dem Versuche II die Differenz zwischen Beobachtung und Rechnung fast 3 Proc. beträgt.

4. Chlorkohlenstoff.<sup>3)</sup> Die drei Werthe, welche

1) L. c. p. 284.

2) L. c. p. 276.

3) L. c. p. 282.

Regnault beobachtet hat, entsprechen den Temperaturgrenzen:

I.	II.	III.
– 20,57	63,48	66,49
7,70	4,13	5,04

Berechnet man mit den Constanten Regnault's:

$$A = 0,19797 \quad B = 0,000\,090\,586$$

die Wärmemengen, welche den Versuchen II und III entsprechen, so erhält man folgende Werthe:

	Wärmemenge $Q$		
	beobachtet	berechnet	Differenz
II.	12,103	12,113	– 0,010
III.	12,575	12,563	+ 0,012

Hier stimmen die beiden Beobachtungen in den Resultaten nahe überein.

5. Schwefelkohlenstoff.<sup>1)</sup> Die vier vorliegenden Versuche liefern die mittleren specifischen Wärmen zwischen den Temperaturen:

I.	II.	III.	IV.
– 37,31	– 29,67	39,49	39,53
6,98	6,11	5,85	6,33.

Diese Versuche sind benutzt, um die Constanten:

$$A = 0,23523 \quad B = 0,000\,081\,516$$

zu berechnen. Mit diesen Constanten erhält man folgende Werthe für die Wärmemengen:

	Wärmemenge $Q$		
	beobachtet	berechnet	Differenz
I.	8,8528	8,9312	– 0,0784
II.	8,4240	8,3480	+ 0,0760
III.	7,9941	8,0336	– 0,0375
IV.	7,9673	7,9394	+ 0,0279

Die beiden Beobachtungen I und II unterscheiden sich um 1,7 Proc., die Abweichung vom Mittel beträgt 0,8 Proc.

Von den fünf hier genannten Flüssigkeiten gibt es eine, nämlich Schwefelkohlenstoff, bei welcher vier Beob-

1) l. c. p. 274.

achtungen zur Berechnung der Constanten benutzt wurden. Bei drei Flüssigkeiten, Aether, Chloroform und Chlorkohlenstoff wurden nur drei Beobachtungen verwerthet, um die specifische Wärme und die Abhängigkeit derselben von der Temperatur zu bestimmen; endlich wurden für Aceton nur zwei Beobachtungen ausgeführt.

Aus diesen Bemerkungen geht mit Rücksicht auf die angestellte Vergleichung von Beobachtung und Berechnung hervor, dass die specifische Wärme der Flüssigkeit mit einer Unsicherheit von etwa 1 Proc. behaftet ist, und dass diese Unsicherheit in den höheren Temperaturen, besonders ausserhalb des Intervalls der Regnault'schen Beobachtung sich noch vergrössert. Diese Ungenauigkeit bedingt dann einen mit der Temperatur wachsenden Einfluss auf die Verdampfungswärme und damit auf die Dichte des Dampfes; derselbe steigt bis zu 1 Proc. an. Man wird daher wohl nicht zu hoch greifen, wenn man in Anbetracht der Beobachtungsfehler in den Gesamtwärmen und ebenso jener in den specifischen Wärmen behauptet, dass die Dichte der Dämpfe durchschnittlich mit einer Unsicherheit von 1 Proc. behaftet ist, und dass diese in den höchsten Temperaturen bis zu 2 Proc. wachsen kann.

Ein Fehler in der Dichte macht sich für die Berechnung der Temperatur nach der von mir aufgestellten Beziehung bei verschiedenen Temperaturen in verschiedener Weise geltend; der Einfluss wird um so grösser, je weiter die Temperatur von dem Normalsiedepunkt entfernt liegt. Für Schwefelkohlenstoff habe ich eine Berechnung ausgeführt, welche dies erkennen lässt. Nimmt man einen Fehler von 1 Proc. in der Dichte an, so erhält man folgende Aenderungen der betreffenden Temperatur:

bei dem Drucke von Atmosphären	Temperatur- änderung	bei dem Drucke von Atmosphären	Temperatur- änderung
10	1,10	4	0,55
8	0,97	2	0,24
	0,79		

Ganz ähnliche Werthe erhält man auch bei den Dämpfen anderer Flüssigkeiten.

### § 13.

Die Beobachtungen Regnault's über den Zusammenhang von Druck und Temperatur der gesättigten Dämpfe sind durch eine Gleichung von der Form:

$$\log F = a + b \cdot \alpha^t + c \beta^t$$

dargestellt, welche auf der rechten Seite fünf constante Grössen enthält, und in welcher auf der linken Seite  $F$  den Druck in Millimetern Quecksilber angibt. Zur Bestimmung der Constanten hat Regnault nur eine beschränkte Zahl seiner Beobachtungsreihen verwendet, weil die verschiedenen Reihen sich nicht immer auf dasselbe Präparat beziehen. Will man daher eine Vergleichung von Beobachtung und Rechnung anstellen, — welche durch die Form der aufgestellten Gleichung sehr erschwert ist — so darf man nur jene Beobachtungsreihen berücksichtigen, auf welche Regnault seine Formeln gegründet hat.

Ich will hier zunächst den Chlorkohlenstoff wählen, weil bei demselben eine Untersuchung in kleineren Drucken möglich ist, und sich hier besonders grosse Abweichungen zeigen. Für den Chlorkohlenstoff liegen vier Beobachtungsreihen vor, von denen Regnault jedoch nur zwei, nämlich die 3. und 2. zur Bestimmung der Constanten benutzt. Die 3. Reihe<sup>1)</sup> beginnt mit der Temperatur 75,77°, enthält dann wachsende Temperaturen bis 189,15°, und führt ferner von der Temperatur 28,20 ausgehend die Beobachtung bis zu 77,14°. Die 4. Reihe umfasst dagegen die Temperaturen von -36,53° bis +56,40°.

Vergleicht man nun den zweiten Theil der Beobachtungen der genannten 3. Reihe mit der Berechnung, so findet man sehr grosse Differenzen. Um hierfür den Beweis zu liefern, habe ich zunächst zur Abkürzung der Rechnung die beobachteten Temperaturen, welche nahe

1) l. c. p. 432.

zusammen liegen, in einen Mittelwerth vereinigt; diese Vereinigung zeigt die folgende Zusammenstellung.

### Chlorkohlenstoff.

Temperatur des ges. Dampfes 1.	Druck des Dampfes 2.	Mittelwerthe	
		der Temperatur 3.	des Druckes 4.
28,20	123,6	28,20	123,6
28,56	127,9	28,56	127,9
29,09	131,5	29,09	131,5
34,60	166,1		
34,78	167,3	34,69	166,7
44,81	250,2		
44,91	251,2	44,86	250,7
53,04	336,0		
52,79	336,9	52,89	336,8
52,83	337,7		
59,47	427,2		
59,55	427,2	59,58	427,9
59,73	429,5		
68,35	574,0		
68,42	574,0	68,38	574,0
77,18	757,5		
77,14	757,5	77,16	757,5

Wie man sieht, stimmen die Beobachtungen bei nahe liegenden Temperaturen sehr nahe überein; man kann daher die Reihen 3 und 4 der vorliegenden Zusammenstellung als den Ausdruck der Beobachtungen ansehen.

Ich habe jetzt nach der Formel Regnault's die den beobachteten Temperaturen zugehörigen Drucke berechnet. In dieser Formel ist:

$$\begin{aligned}
 a &= 12,096\,233\,1 & \log a &= 0,999\,712\,0 - 1 \\
 b &= -9,137\,518\,0 & \log \beta &= 0,994\,978\,0 - 1 \\
 c &= -1,967\,489\,0 & t &= T + 20,
 \end{aligned}$$

wo  $T$  die Temperatur des Dampfes bezeichnet.

Die nach dieser Formel berechneten Drucke sind in der 3. Reihe der folgenden Tabelle angegeben; die 4. Reihe enthält die Differenz dieses Druckes gegenüber dem beobachteten Werthe. Um endlich den Einfluss auf die Temperaturbestimmung zu erfahren, sind in der 5. Reihe die Temperaturdifferenzen mitgetheilt, welche der angegebenen

Druckdifferenz entsprechen, und welche durch Interpolation bestimmt wurden.

## Chlorkohlenstoff.

Temperatur des Dampfes beobachtet 1.	Druck des Dampfes		Differenz von 2 u. 3 4.	Temperaturdiffe- renz entsprechend der Druckdifferenz 5.
	beobachtet 2.	berechnet 3.		
28,20	123,6	131,8	— 8,2	1,46
28,56	127,9	133,7	— 5,8	1,02
29,09	131,5	136,8	— 5,3	0,95
34,69	166,7	173,3	— 6,6	0,99
44,86	250,7	259,6	— 8,9	0,97
52,89	336,8	349,0	— 12,2	1,02
59,58	427,9	441,1	— 13,2	0,93
68,38	574,1	590,2	— 16,2	0,87
77,16	757,5	775,1	— 17,6	0,77

Die mittlere Differenz der Temperaturen beträgt  $0,99^{\circ}$ , wie aus der letzten Reihe hervorgeht. Während bei den obigen Werthen die berechneten Drucke immer beträchtlich grösser als die beobachteten sind, ist bei der 4. Serie der Regnault'schen Versuche in demselben Temperaturintervall und bei noch niedrigeren Temperaturen häufig das Gegentheil der Fall. Auf diese Werthe will ich hier nicht näher eingehen, da durch die obige Tabelle zur Genüge bewiesen ist, dass zwischen Beobachtung und Berechnung bei den Regnault'schen Versuchen Differenzen vorkommen, welche bis zu  $1,00^{\circ}$  gehen. Es handelt sich hierbei nicht etwa um einen vereinzeltten Werth, dessen Abweichung durch zufällige Umstände veranlasst sein könnte, sondern eine grosse Anzahl von Versuchen (die vorliegende Tabelle umfasst 17 Beobachtungen) zeigt beträchtliche Abweichungen in demselben Sinne. Diese Abweichungen sind nicht Folge von Beobachtungsfehlern, sei es der Drucke oder der Temperaturen, sondern sind durch Aenderungen bedingt, welche der Dampf während der Beobachtung erfährt. Es geht dies aus der 3. Serie hervor; der erste Versuch bezieht sich nämlich auf die Temperatur  $75,77^{\circ}$  und liefert den Druck 745,6 mm; die Berechnung ergibt 743,0, also nahe übereinstimmend, aber doch etwas

kleiner. Dieser erste Versuch zeigt also gerade das entgegengesetzte Verhalten, wie die späteren Versuche der 3. Serie, welche in der obigen Tabelle mitgetheilt sind, woraus wohl mit Recht zu schliessen ist, dass der Dampf während der folgenden Versuche eine Aenderung erfahren hat.

Die Versuche Regnault's, welche in derselben Reihe unmittelbar aufeinander folgen, zeigen meistens eine gute Uebereinstimmung und das gleiche Verhalten gegenüber den Beobachtungen. Die grössten Differenzen kommen unter den Beobachtungen verschiedener Reihen vor; nur, wenn verschiedene Reihen Versuche enthalten, welche demselben Temperaturintervall angehören, oder wenn in derselben Reihe die beobachteten Temperaturen sich nicht immer in demselben Sinne ändern, finden sich beträchtliche Abweichungen gegenüber den berechneten Werthen. Solche Reihen können aber allein dazu dienen, um eine Genauigkeitsbestimmung der Beobachtungen zu erhalten.

Beim Chlorkohlenstoff habe ich Drucke unterhalb einer Atmosphäre zur Vergleichung von Beobachtung und Rechnung gewählt, weil in diesen Drucken doppelte Reihen von Beobachtungen vorhanden waren. Um auch ein Beispiel von höheren Drucken zu erhalten, möge der Aether dienen, und sollen im Folgenden diejenigen Drucke verglichen werden, welche sich auf Temperaturen oberhalb 100° beziehen. In der folgenden Zusammenstellung sind zunächst die Mittelwerthe angegeben.

#### Aether.

Temperatur des ges. Dampfes 1.	Druck des Dampfes 2.	Mittelwerthe	
		der Temperatur 3.	des Druckes 4.
100,15	4939,32	100,13	4936,3
100,11	4939,37		
100,45	5078,33	100,46	5078,5
100,47	5078,73		
104,77	5589,41	104,76	5587,7
104,75	5585,92		
109,03	6139,75	109,03	6136,3
109,03	6132,82		



## Aether. (Fortsetzung.)

Temperatur des ges. Dampfes 1.	Druck des Dampfes 2.	Mittelwerthe der Temperatur 3. des Druckes 4.	
111,93	6520,64	111,91	6513,6
111,89	6506,64		
116,03	7084,53	115,94	7066,3
115,86	7048,14		
106,23	5651,11	106,23	5647,1
106,22	5643,11		
113,35	6596,70	113,31	6584,6
113,30	6582,25		
113,28	6574,76		

In den Reihen 3 und 4 der obigen Tabelle sind die Mittelwerthe angegeben, welche den unmittelbaren Beobachtungen entsprechen. An den Temperaturbestimmungen, welche sich auf das Quecksilberthermometer beziehen, ist noch eine kleine Correction anzubringen, um dieselben auf die Angaben des Luftthermometers zurückzuführen. Regnault gibt für die beim Aether benutzten Thermometer an, dass bei  $110^{\circ}$  das Luftthermometer  $0,05^{\circ}$ , und bei  $120^{\circ}$  dasselbe  $0,11^{\circ}$  niedriger als das Quecksilberthermometer zeigt. Berücksichtigt man dies, so erhält man folgende Temperaturen, denen die beobachteten und berechneten Drucke beigelegt sind. Die letzteren wurden nach Regnault's Formel berechnet, in welcher:

$$\begin{aligned}
 a &= 5,028\,629\,8 & \log \alpha &= 0,014\,577\,5 \\
 b &= 0,000\,228\,4 & \log \beta &= 0,996\,877\,7 - 1 \\
 c &= -3,190\,639\,0 & t &= T + 20
 \end{aligned}$$

zu setzen ist.

## Aether.

Temperatur des Dampfes beobachtet 1.	Druck des Dampfes		Differenz von 2 u. 3 4.	Temperaturdiffe- renz entsprechend der Druckdifferenz 5.
	beobachtet 2.	berechnet 3.		
100,13	4936,3	4969,4	-33,1	-0,27
100,46	5078,5	5007,4	+71,1	+0,59
104,74	5587,7	5511,8	+75,9	+0,63
108,99	6136,3	6078,0	+58,3	+0,44
111,86	6513,6	6475,7	+37,9	+0,26
115,86	7066,3	7064,7	-1,7	+0,01
106,20	5647,1	5710,0	-62,9	-0,48
113,25	6584,6	6675,5	-91,1	-0,63

In der letzten Reihe der obigen Tabelle sind die den Druckdifferenzen entsprechenden Temperaturänderungen berechnet. Wie man sieht, kommt das positive und negative Vorzeichen ziemlich gleichmässig vor, sodass in der That die Regnault'sche Curve die Beobachtungen gut wiedergibt; die mittlere Abweichung ohne Rücksicht auf das Vorzeichen beträgt indessen  $0,41^\circ$ , Hieraus erkennt man, dass auch bei den hohen Drucken bis zu 10 Atmosphären die Differenzen zwischen Beobachtung und Berechnung nicht so klein sind, als man leicht anzunehmen geneigt ist, weil ja einer geringern Temperaturänderung schon eine so bedeutende Druckänderung entspricht.

Es sind jetzt noch die grossen Differenzen zwischen Beobachtung und Berechnung (nach der von mir aufgestellten Beziehung) zu besprechen, welche sich beim Chloroform und Chlorkohlenstoff in niedrigen Drucken ergeben. Beim Chloroform steigt diese Differenz bei dem Drucke von  $\frac{1}{4}$  Atmosphäre auf  $2,95^\circ$  und beim Chlorkohlenstoff bei dem Drucke von  $\frac{1}{16}$  Atmosphäre auf  $2,00^\circ$ .

Was zunächst das Chloroform angeht, so hat Regnault von 6 Versuchsreihen nur 3, nämlich die 2., 5. und 6. zur Bestimmung seiner Formel benutzt. Die Reihe 5 reicht von der Temperatur  $21,78^\circ$  bis  $59,79^\circ$ , und die Reihe 6 von der Temperatur  $59,87^\circ$  bis  $161,29^\circ$ . Diese beiden Reihen umfassen kein den Reihen gemeinschaftliches Temperaturintervall, und daher ist eine Untersuchung der Genauigkeit hier nicht ausführbar. Die 2. Reihe geht von  $12,55^\circ$  bis  $42,99^\circ$  und enthält nur 5 Versuche eines Präparates, von dem Regnault, gegenüber dem Präparate, welches zu den Reihen 5 und 6 verwandt ist, bemerkt: „La série 2 appartient à un chloroforme différent et probablement moins pur, mais qui, dans ses forces élastiques ne diffère sensiblement de l'autre qu'à des températures supérieures à  $35^\circ$ .“ Wenn diese Reihe 2 mit der Reihe 5 in niedrigen Temperaturen eine Uebereinstimmung zeigt, so kann darin kein Beweis für die Richtigkeit der Reihe 5 liegen, da thatsächlich, wie Regnault selbst bemerkt, die Reihe 2

sich auf ein Präparat bezieht, welches von dem Präparate der Reihe 5 verschieden ist, und da die Resultate beider Reihen in den Temperaturen über  $35^{\circ}$  nicht mehr übereinstimmen. Wie gross der Unterschied der Präparate hier ist, das geht aus der 3. Reihe hervor, welche sich auf dasselbe Präparat wie die Reihe 2 bezieht. Nach dieser Reihe berechnet sich der Siedepunkt bei dem Drucke von 1 Atmosphäre auf  $60,95^{\circ}$ , während er aus den Reihen 5 und 6 nach der Formel Regnault's zu  $60,18^{\circ}$  angegeben wird. Ich glaube daher, dass der grosse Unterschied von  $2,95^{\circ}$  zwischen Beobachtung und Berechnung bei dem kleinen Drucke von  $\frac{1}{4}$  Atmosphäre keine grosse Bedeutung hat, und dass derselbe durch eine kleine Aenderung in der Zusammensetzung der Flüssigkeit hervorgerufen werden kann.

Beim Chlorkohlenstoff ist die Differenz von  $2,00^{\circ}$  für den Druck von  $\frac{1}{16}$  Atmosphäre leichter zu erklären, weil dort schon nachgewiesen ist, dass die beiden Versuchsreihen, welche zur Darstellung der Formel gedient haben, sehr grosse Differenzen zeigen. Würde man jede der dort in Frage stehenden Versuchsreihen für sich durch eine Curve darstellen, so würden dieselben einen ganz verschiedenen Verlauf nehmen. Wenn man nun doch, so gut es geht, beide Versuchsreihen durch eine Curve darzustellen versucht, so werden daraus Resultate entstehen, welche besonders in den Anfangs- und Endwerthen eine grosse Unsicherheit in sich schliessen müssen.

Fasst man das Resultat dieses Paragraphen zusammen, so wird man es als erwiesen betrachten, dass bei den Beobachtungen Regnault's über die Spannkkräfte der hier in Betracht kommenden Flüssigkeiten häufig grössere Differenzen zwischen Beobachtung und Berechnung nach Regnault's Formel vorkommen, und dass dieselben bei Drucken grösser als 1 Atmosphäre  $0,4^{\circ}$  erreichen und bei Drucken kleiner als 1 Atmosphäre bis zu  $1^{\circ}$  ansteigen.

#### § 14.

Für die Beurtheilung der Differenzen zwischen Beobachtung und Berechnung der bestimmten Drucken ent-

sprechenden Temperaturen, wie sie sich nach den von mir aufgestellten Formeln ergaben, bleibt ausser dem bereits Gesagten noch zu erwägen, dass die beiden hier vor allem in Betracht kommenden Beobachtungen, die Spannkraftbestimmung einerseits und die Ermittlung der Gesamtwärmen andererseits zeitlich um viele Jahre auseinander liegen und darum auch wohl nicht auf völlig gleiche Präparate sich beziehen.

Bedenkt man dies und berücksichtigt man ferner alle die Umstände, welche in den beiden letzten Paragraphen besprochen sind, und welche dazu beigetragen haben können, eine Differenz zwischen Beobachtung und Berechnung nach der von mir aufgestellten Beziehung herbeizuführen, so wird man, glaube ich, die thatsächlich vorhandenen Differenzen, welche in den Tabellen angegeben sind, nicht gross finden und daher schliessen, dass die fragliche Beziehung genügend bestätigt wird.

Nur auf einen Punkt möchte ich hier noch hinweisen. Aus der Vergleichung der in den Tabellen (§ 11) angegebenen Differenzen zwischen Beobachtung und Berechnung geht hervor, dass die Differenzen bei den Drucken von 2 bis 7 oder 8 Atmosphären bei allen Dämpfen mit Ausnahme jener des Chloroforms positiv werden. Diese Uebereinstimmung scheint anzudeuten, dass in einer oder mehreren Grössen, welche für die fragliche Differenz massgebend sind, ein constanter Fehler vorhanden ist. Ich vermuthe, dass dieser Fehler in der Gesamtwärme der Verdampfung liegt, und dass die Form der Gleichung:

$$\lambda = a + bt + ct^2 + \dots$$

zur Darstellung der Gesamtwärmen nicht geeignet ist, wenn man nicht eine sehr grosse Anzahl von Constanten bestimmen will; ich glaube vielmehr, dass sich eine andere Form zur Darstellung der Gesamtwärmen finden lässt, welche mit den Beobachtungen wenigstens ebenso gut übereinstimmt, wie die von Regnault angenommene Form, und welche sich von dieser dadurch unterscheidet, dass sie bei den Drucken von 2 bis 5 Atmosphären etwas kleinere

Werthe liefert. Leider geben die Beobachtungen über die Gesamtwärmen bei diesen Drucken nur sehr wenig Werthe; so geht beim Aether der Druck von 1 Atmosphäre ohne ein Zwischenglied zu 5 Atmosphären; Chlorkohlenstoff liefert zwischen den Drucken von 1 und 4 Atmosphären keine Beobachtung, und beim Aceton hat man nur Werthe bei 1, 3, 5, 8 und 10 Atmosphären, die eine geringe Uebereinstimmung zeigen. Wenn aber auch die Beobachtungen bei den fraglichen Drucken keine oder nur wenige directe Anhaltspunkte bieten, so ist es doch wünschenswerth, den Versuch, die Gesamtwärmen durch eine andere Form der Gleichung darzustellen, wirklich auszuführen.

## § 15.

Vor einiger Zeit hat Dühning<sup>1)</sup> ein Gesetz aufgestellt, welches den Zusammenhang der Siedetemperaturen verschiedener Flüssigkeiten bei demselben Drucke angibt. Dasselbe lässt sich so aussprechen: Siedet das Wasser unter einem Drucke von  $n$  Atmosphären bei der Temperatur  $t_n$ , und siedet eine andere Flüssigkeit unter demselben Drucke bei der Temperatur  $T_n$ , so ist:

$$T_n = r + q \cdot t_n,$$

wo  $r$  und  $q$  zwei constante Grössen sind, die von dem Drucke  $n$  unabhängig sind und nur von der Natur der zweiten Flüssigkeit abhängen.

Würde dieses Gesetz von Dühning richtig sein, so müsste die von mir aufgestellte Beziehung zwischen Druck, Temperatur und Dichte der gesättigten Dämpfe falsch sein; nur in einem Falle könnten beide Beziehungen gleichzeitig bestehen, nämlich dann, wenn die Dichten der gesättigten Dämpfe aller Flüssigkeiten sich mit wachsendem Drucke gleichmässig änderten, sodass der Quotient der Dichten zweier Dämpfe, bezogen auf gleiche Drücke, unabhängig vom Drucke wäre. Dies trifft aber für die Dichten in der That nicht zu, und daher bleibt die oben aufgestellte Alternative bestehen.

1) Dühning, Neue Grundgesetze der rationellen Physik und Chemie. Erste Folge. 1878.

Es lässt sich nun aber leicht zeigen, dass das von Dühring aufgestellte Gesetz nur als eine Annäherung zu betrachten ist, und dass dasselbe in höheren Drucken ganz beträchtliche Abweichungen zeigt. Zwar sagt Dühring <sup>1)</sup>: „Die Abweichungen der berechneten von den beobachteten Temperaturen sind, wie die Tabellen zeigen, äusserst geringfügig. Nur bei den niedrigsten Drucken werden für Alkohol und Aether die Unterschiede beachtenswerth, erklären sich aber sehr leicht aus der beträchtlichen Wirkung, die bekanntlich schon die geringste fremde Beimischung bei diesen Substanzen auf die niederen Dampfspannungen hervorbringt.“

Unter den Dämpfen, welche Dühring als Beweis für die Richtigkeit seines Gesetzes in ihren Temperaturen tabellarisch geordnet mittheilt, befinden sich zwei, welche auch uns früher beschäftigt haben, nämlich Aether und Schwefelkohlenstoff. Dühring verfolgt den Aether bis zu einer Temperatur von 80° und findet dort eine Abweichung von 1,22°. Diese Differenz von 1,22° bei dem Drucke von etwa vier Atmosphären steigert sich immer mehr, wenn man zu höheren Drucken übergeht, wie die folgende Tabelle in der letzten Reihe zeigt.

## Aether.

Druck in Atmo- sphären	Temperatur des Dampfes		Differenz
	beobachtet	berechnet nach Dühring	
1	34,97	34,97	0,00
2	55,87	55,57	+0,30
3	69,61	68,88	+0,73
4	80,21	78,97	+1,24
5	88,96	87,19	+1,77
6	96,47	94,19	+2,28
7	103,08	100,31	+2,77
8	109,00	105,78	+3,22
9	114,37	110,74	+3,63
10	119,39	115,28	+4,11

Die Werthe der dritten Reihe sind nach der Formel:

$$T_n = -65,03 + 1,000 t_n,$$

welche Dühring für den Aether aufgestellt hat, berechnet.

<sup>1)</sup> l. c. p. 81.

Beim Schwefelkohlenstoff geht die Berechnung von Dühring bis  $90^\circ$  und zeigt dort eine Abweichung von  $0,88^\circ$  gegenüber der Beobachtung. Auch hier werden die Differenzen beträchtlich grösser mit wachsendem Drucke, wie wieder die letzte Reihe der folgenden Tabelle zeigt.

## Schwefelkohlenstoff.

Druck in Atmo- sphären	Temperatur des Dampfes		Differenz
	beobachtet	berechnet nach Dühring	
1	46,25	46,20	+0,05
2	69,25	69,09	+0,16
3	84,45	83,88	+0,57
4	96,17	95,08	+1,09
5	105,86	104,21	+1,65
6	114,21	111,99	+2,22
7	121,59	118,79	+2,80
8	128,59	124,87	+3,38
9	134,34	130,38	+3,96
10	139,97	135,42	+4,55

Die Werthe der dritten Reihe sind nach der Formel:

$$T_n = -64,90 + 1,111 t,$$

welche Dühring für Schwefelkohlenstoff aufgestellt hat, berechnet.

Aus den beiden vorgeführten Tabellen geht hervor, dass die Abweichungen der berechneten von den beobachteten Werthen in den hohen Drucken sehr gross werden; die Differenzen in der vierten Reihe steigen bis über  $4^\circ$ .

Auch für die übrigen von mir untersuchten Dämpfe habe ich nach dem von Dühring angegebenen Gesetze die Temperaturen berechnet und ganz ähnliche Differenzen gefunden, wie beim Aether und Schwefelkohlenstoff. Ich unterlasse es, die hierauf bezüglichen Resultate mitzutheilen, da ich die beiden vorgeführten Tabellen für genügend halte, um den Beweis zu liefern, dass das von Dühring aufgestellte Gesetz der Wahrheit nicht entspricht und nur als eine gewisse Annäherung betrachtet werden kann, die in niedrigen Drucken zur Geltung kommt.

Hohenheim, im December 1879.

### III. *Untersuchungen über die Schwingungen einer Normalstimmgabel; von Dr. Rudolph Koenig in Paris.*

Im Verlaufe der letzten zwanzig Jahre hat die Stimmgabel als Präcisionsinstrument eine immer ausgedehntere Anwendung gefunden und ist zu immer genaueren Untersuchungen verwendet worden, damit haben sich denn auch natürlich die Ansprüche an die Genauigkeit der Kenntniss ihrer Schwingungszahl beträchtlich steigern müssen. Die Stimmgabel, welche ich in den ersten Zeiten, als ich mich mit der Construction akustischer Instrumente zu beschäftigen anfang, mit den mir damals zu Gebote stehenden Mitteln etablirte, und als Etalon adoptirt hatte, trug die Angabe  $Ut_3 (\bar{c}) = 512$  v. s. ohne die besondere Angabe der Temperatur, sollte aber meiner Absicht nach diese Schwingungszahl bei 20 Centigrad Wärme geben. Ich bemerkte bei meinen ferneren Arbeiten, dass diese Gabel aller Wahrscheinlichkeit nach bei  $+20^\circ$  um einen Bruchtheil einer einfachen Schwingung zu hoch war, und also ihre Temperatur um einige Grade erhöht werden musste, wenn sie die Zahl von 512 v. s. in der Secunde mit absoluter Genauigkeit geben sollte. Da der Experimentator, welcher eine Stimmgabel anwendet, nur in den seltensten Fällen gerade bei der Temperatur arbeiten wird, für welche die Gabel construirt ist, und daher doch immer eine Correctur wird machen müssen, wenn seine Untersuchungen derart sind, dass sie eine Genauigkeit der Stimmung erfordern, bei welcher die Wirkung geringer Temperaturveränderungen schon in Rechnung kommt, so ist es im Grunde ganz gleichgültig, ob seine Gabel bei einigen Graden Wärme mehr oder weniger gestimmt ist, und es kommt nur darauf an, dass ihm dieser Wärmegrad selbst und die Aenderung, welche die Schwingungszahl seiner Gabel bei anderen Temperaturen erleidet, genau bekannt seien. — Es schien mir, dass die Bestimmung der sehr kleinen Grösse, um welche die erwähnte Gabel von dem



wahren Werthe abweichen mochte, wie auch die sehr genaue Bestimmung des Temperatureinflusses mittelst der bisher für Untersuchungen dieser Art angewendeten Methoden, schwer mit Sicherheit zu erreichen sein würde, und ich habe daher die folgenden Untersuchungen erst unternommen, nachdem es mir möglich geworden war, einen neuen Apparat auszuführen, welcher meinen Zwecken vollständig entsprach. Derselbe zeichnet sich nicht allein durch die ausserordentliche Präcision seiner Angaben aus, sondern hat auch noch die Vorzüge, dass er diese Angaben ohne jede umständliche oder schwierige Manipulation des Beobachters liefert, und gestattet zu jeder Zeit die absolute Schwingungszahl der Normalgabel verificiren und die geringste, durch irgend welche Umstände bewirkte Abweichung derselben von ihrer ursprünglichen Stimmung, sofort nachweisen zu können. Um denselben herzustellen, habe ich nicht nöthig gehabt, etwas Neues zu erfinden, sondern nur verschiedene bekannte Elemente passend verbinden dürfen.

Eine Stimmgabel  $C(U_1) = 128 \text{ v. s.}^1$ ) ist mit einem Uhrwerke in der Weise verbunden, dass sie mittelst des Echappements den Gang desselben regulirt, zugleich aber auch durch dasselbe bei jeder Vibration eine kleine Impulsion erhält, sodass ihre Schwingungsbewegung dauernd unterhalten wird, wie dieses zuerst in einer Uhr realisirt worden war, welche Hr. Niaudet am 10. December 1866 der Akademie der Wissenschaften in Paris präsentirt hat, und welche auch auf den Ausstellungen von Paris 1867, und von Wien 1873 figurirte. Dieses Uhrwerk, welches für mich von Hrn. Brown in vorzüglicher Weise ausgeführt wurde, trägt drei Zifferblätter. Auf dem ersten, welches in 128 Theile getheilt ist, macht der Zeiger einen Umlauf in der Zeit, in welcher die Stimmgabel 128 v. s. ausführt, also in einer Secunde. Das zweite Zifferblatt und das dritte und grösste, zeigt die Secunden, Minuten und Stunden an, wie ein gewöhnlicher Chronometer. Beim

1) Alle hier angewandten Stimmgabeln waren aus demselben englischen Gussstahl gefertigt.

Aufziehen des Uhrwerkes wird die Schwingungsbewegung der Gabel in keiner Weise gestört oder unterbrochen. — Auf beiden Zinken der Stimmgabel befinden sich Mikrometerschrauben mit schweren Köpfchen, welche eine äusserst genaue Regulirung der Schwingungsperiode gestatten. Auf



einer Zinke derselben ist ausserdem das Objectiv eines Mikroskopes befestigt, dessen Körper mit dem Ocular sich dahinter auf dem Gestelle befestigt befindet, so dass auf diese Weise ein Vibrationsmikroskop nach Lissajous gebildet wird. Das Gegengewicht der Objectivlinse auf der zweiten Zinke der Gabel besteht in einem Stahlspiegel. Zwischen den Zinken der Gabel ist ein Thermometer angebracht, dessen Quecksilberbehälter bis in die Biegung

hinabreicht, wo die Bewegung der Arme am geringsten, der Einfluss der Wärme auf dieselben aber am grössten ist.

Setzt man bei diesem Apparate Gabel und Uhrwerk in Gang, so erhält man nun eine durchaus isochrone, immer gleich weite Schwingungsbewegung von unbegrenzt langer Dauer, welche man mit der Bewegung jedes andern tönenden Körpers optisch vergleichen kann, und deren absolute Schwingungszahl sich aus dem blossen Vergleiche

der Uhr des Instrumentes mit einem Chronometer ergibt. Ist diese Uhr während einer Stunde durchaus richtig gegangen, so hat die Stimmgabel genau  $3600.128 = 460,800$  v. s., oder in jeder Secunde 128 v. s. gemacht, ist sie dagegen in einer Stunde z. B. eine Secunde vor oder nach gegangen, so zeigt sie damit an, dass die Stimmgabel in derselben Zeit 128 v. s., und in einer Secunde  $\frac{128}{3600} = 0,0355$  v. s. mehr oder weniger ausgeführt hat.

Ist die Stimmgabel bei einer bestimmten Temperatur so gestimmt, dass die Uhr absolut richtig, wie das Chronometer, geht, so gibt die Abweichung von diesem Gange, welche sich bei einer andern Temperatur zeigt, dann natürlich unmittelbar den Einfluss an, welchen der betreffende Unterschied in der Temperatur auf die absolute Schwingungszahl der Gabel ausgeübt hat, nur muss man sich hüten, die Angaben des Thermometers immer ohne weiteres als auch für die Temperatur der Gabel gültig anzusehen, denn diese letztere braucht eine weit längere Zeit, um die Temperatur der sie umgebenden Luft vollständig anzunehmen, als das Thermometer.

Um die Länge dieser Zeit genauer zu bestimmen, habe ich mehrere Versuchsreihen in folgender Weise ausgeführt. Von zwei Unisonogabeln  $\bar{c}$  ( $U_3$ ) = 512 v. s., welche das genaue Intervall der Octave mit der Gabel eines Vibrationsmikroskopes  $c$  ( $U_2$ ) bildeten, wurde eine erhitzt und dann die Abnahme der durch die Wärme erzeugten Verstimmung von 5 zu 5 Minuten, zuerst vermittelt der Stösse mit der Unisonogabel, so lange diese noch schnell genug waren, um ihre Dauer ohne Schwierigkeit wahrnehmen zu lassen, darauf aber durch Beobachtungen mit dem Vibrationsmikroskope bestimmt.

Erhitzte ich die Gabel  $\bar{c}$ , bis ihr Ton um 4 v. s. vertieft war, so betrug diese Vertiefung durchschnittlich:

nach	$5\frac{1}{2}$	Minuten	nur	2,000	v. s.
"	12	"	"	1,000	"
"	25	"	"	0,500	"
"	37	"	"	0,250	"

nach	50 Minuten	nur noch	0,133 v. s.
"	60	" " "	0,080 "
"	70	" " "	0,054 "
"	80	" " "	0,039 "
"	100	" " "	0,016 "
"	120	" " "	0,002 "

In diesem letzten Falle machte also die durch das Vibrationsmikroskop beobachtete optische Figur während einer Minute noch etwa ein Achtel einer halben Umdrehung. Zehn bis zwanzig Minuten später verschwand dann aber auch schliesslich die letzte Spur einer Drehung der Figur, sodass demnach die Stimmgabel zwischen zwei und zweieinhalb Stunden gebraucht, um von einer Temperatur, welche sie um 4 v. s. vertieft, zur Temperatur der sie umgebenden Luft zurückzukehren.

Vertieft man die Gabel um nur 0,5 v. s., indem man sie etwa eine Minute lang in der Hand hält, so verschwindet diese Vertiefung schon ungefähr eine Viertelstunde früher als die gleiche Vertiefung bei vorhergegangener starker Erhitzung. Der Grund hierfür liegt wahrscheinlich darin, dass im ersten Falle dieselbe Vertiefung durch eine vielleicht etwas grössere, aber nicht tief in die Masse der Gabel eindringende, im letztern dagegen durch eine etwas geringere, aber die Gabel ganz durchdringende Wärme hervorgerufen wird. Dieses dürfte auch die Erklärung dafür abgeben, weshalb bei der Stimmgabel des Apparates die Zeitdauer für die Annahme der Temperatur der sie umgebenden Luft, wie sie sich aus der Beobachtung der Uhr ergab, etwas grösser war als bei den verhältnissmässig ziemlich schnell erhitzten Gabeln. Als z. B. bei einer ersten Versuchsreihe die Gabel genau bei  $+18^{\circ}$  gestimmt war, und an einem Nachmittage von 5 bis 10 Uhr bei dieser immer unveränderten Temperatur die Uhr einen durchaus gleichen Gang mit dem Chronometer gezeigt hatte, konnte man am nächsten Morgen, wo das Thermometer wieder  $+18^{\circ}$  angab, von 9 Uhr an ein Vorgehen noch bis gegen  $1\frac{1}{2}$  Uhr wahrnehmen, welches beiläufig im

ganzen für diese  $4\frac{1}{2}$  Stunden eine Secunde betrug, und erst dann blieb ihr Gang wieder bis 10 Uhr in absoluter Uebereinstimmung mit dem Chronometer. Die Gabel hatte also in diesem Falle  $4\frac{1}{2}$  Stunden gebraucht, um die während der Nacht angenommene geringe Erkältung wieder vollständig zu verlieren. Man ersieht aus allen diesen Beobachtungen, dass man nur dann der Gabel des Apparates die vom Thermometer angegebene Temperatur zuschreiben kann, wenn diese Temperatur während mehrerer Stunden unverändert geblieben ist, und die Uhr, mit dem Chronometer verglichen, in ihrem Gange während einiger Stunden keinen Wechsel mehr bemerken lässt.

Es wäre hiernach am zweckmässigsten, in einem Raume zu experimentiren, in dem die Temperatur immer gleich bliebe, aber es ist schwer und sehr umständlich, durch künstliche Heizung in einem Zimmer während mehrerer Tage und Nächte einen immer gleichen Wärmegrad zu unterhalten, und tiefe Kellerräume, in denen die Temperatur von selbst unverändert bleibt, haben wieder den Nachtheil, dass ihre Temperatur zu niedrig ist, nämlich für Paris  $12^{\circ}$ . Will man aber eine Normalstimmgabel herstellen, welche durchschnittlich bei der gewöhnlichen Zimmertemperatur so richtig als möglich ist, so muss man sie für eine höhere als die mittlere Temperatur des Ortes construiren, denn bei der Bestimmung der letztern ist die grösste Kälte so gut wie die grösste Wärme in Anschlag gebracht worden, wogegen die mittlere Temperatur, bei der man mit Stimmgabeln zu arbeiten pflegt, doch wohl nur aus der gewöhnlichen Temperatur geheizter Zimmer und den über diese hinausgehenden Temperaturen des Ortes abzuleiten ist, da die Anwendung von Stimmgabeln zu genauen Experimenten bei starker Kälte nur sehr vereinzelt vorkommen dürfte. Ich habe aus diesen Gründen für die Normalgabel die Temperatur von 20 Centigrad Wärme gewählt und alle Experimente in einem sehr grossen und hohen, überall geschlossenen Zimmer ausgeführt, in dem die Temperatur sich immer nur sehr langsam und

verhältnissmässig wenig änderte, sodass oft das Thermometer von morgens bis abends fast gar keine Schwankungen anzeigte, wie dieses besonders an bewölkten, ganz sonnenlosen Tagen der Fall war, an denen es in diesem Jahre in Paris nicht mangelte.

Man könnte sich auch fragen, ob der Einfluss des sehr lange fortgesetzten Vibrirens der Gabel auf ihre Temperatur nicht schon gross genug wäre, um bei der Bestimmung ihrer Temperatur in einem gegebenen Augenblicke mit in Rechnung gebracht werden zu müssen, derselbe scheint jedoch so äusserst gering zu sein, dass man ihn wohl nur genau bestimmen könnte, wenn man in einem Raume experimentirte, in dem die Temperatur immer constant bliebe. Ich habe unter meinen zahlreichen Beobachtungen nur zwei gefunden, bei denen die Umstände für die Wahrnehmung dieses Einflusses günstig genug waren, und in welchen derselbe deutlich sichtbar zu sein scheint. Die Temperatur des Zimmers bei der ersten (25. Juli 1879), jede Stunde beobachtet, blieb von 8 Uhr morgens bis 4 Uhr abends beständig  $+20^{\circ}$ , und der Gang der Uhr in vollkommener Uebereinstimmung mit dem des Chronometers, um 5 Uhr war sie jedoch bis zu etwa  $+19,7^{\circ}$  gesunken, die Uhr aber, statt infolge dessen etwas vorzugehen oder doch wenigstens noch denselben Gang beizubehalten, retardirte jetzt um  $\frac{1}{4}$  Secunde, und bis 8 Uhr, wo die Temperatur noch immer  $+19,7^{\circ}$  war, sogar um eine halbe Secunde. Erst nach 8 Uhr zeigte sich dann die Wirkung einer Erkaltung, indem bis 10 Uhr, bei  $+19,5^{\circ}$ , die Uhr wieder um eine halbe Secunde vorgegangen war, und somit auf den Punkt zurückgekehrt, auf dem sie ohne innere Erwärmung hätte bleiben müssen, wenn die Temperatur des Zimmers, statt zu sinken, bis 10 Uhr auf  $+20^{\circ}$  geblieben wäre.

In der zweiten Beobachtungsreihe (22. Sept.) finden sich leider nicht genug Ablesungen, um den ganzen Gang der Erscheinung, wie bei der ersten, verfolgen zu können. Die Temperatur war um 2 Uhr und um 7 Uhr abends  $+20^{\circ}$ , und der Gang der Uhr in vollständiger Ueberein-

stin  
10  
mun  
19,6

der  
das  
unt  
che  
hat  
mun  
tur  
Jul  
tem  
dur  
Uel  
Chr  
Beo  
Mon  
per  
rech  
von  
um  
46  
gebl  
um  
liche  
von  
blie  
11  
mun

rate  
auf  
nau  
C =  
Vib  
An

stimmung mit dem Chronometer. Dann erst wieder um 10 Uhr 30 Minuten beobachtet, fand diese Uebereinstimmung noch statt, obgleich die Temperatur bis zu etwa  $19,6^{\circ}$  gesunken war.

Ich stimmte nun die Stimmgabel des Apparates bei der Temperatur von  $20^{\circ}$  Centigrad Wärme in der Weise, dass sie während sechs Stunden durchaus keinen Gangunterschied mit dem Chronometer wahrnehmen liess, welcher selbst in 24 Stunden nur eine Secunde vorging, und hatte Gelegenheit, mich von der Richtigkeit dieser Stimmung noch mehrfach zu überzeugen, indem die Temperatur des Zimmers bei ihren Schwankungen im Juni und Juli noch sechsmal, und in der zweiten Hälfte des September noch einmal, und stets auf vier bis acht Stunden, durch  $20^{\circ}$  passirte, wo sich dann immer die absolute Uebereinstimmung zwischen dem Gange der Uhr und des Chronometers wieder herstellte. — Auch als bei einer Beobachtungsreihe (19. Juli), von 7 Uhr 46 Min. 45 Sec. Morgens, bis 6 Uhr 46 Min. 45 Sec. Abends die Temperatur von  $19,3^{\circ}$  bis  $20,3^{\circ}$  variirt hatte, aber die Berechnung für die ganze Zeitdauer die mittlere Temperatur von  $20^{\circ}$  ergab, war die Uhr erst bis 9 Uhr 46 Min. 45 Sec. um eine halbe Secunde vorgegangen, dann bis 2 Uhr 46 Min. 45 Sec. in gleichem Gange mit dem Chronometer geblieben, bis 5 Uhr 46 Min. 45 Sec. aber dann wieder um eine halbe Secunde nachgegangen, sodass das schliessliche Resultat ganz dasselbe war, als wäre die Temperatur von morgens bis abends  $20^{\circ}$  gewesen. — Beiläufig gesagt, blieb an dem Tage nach 6 Uhr die Temperatur noch bis 11 Uhr auf  $20^{\circ}$ , und die Uhr in absoluter Uebereinstimmung mit dem Chronometer.

Mit der in solcher Weise regulirten Gabel des Apparates stimmte ich darauf bei  $20^{\circ}$  Wärme optisch eine Gabel auf die Doppeloctave  $\bar{c}$  ( $U_3$ ) = 512 v. s. mit solcher Genauigkeit, dass, wenn sie gleiche Temperatur mit der Gabel  $C$  = 128 v. s. hatte, und ihre Schwingungen durch das Vibrationsmikroskop bis zu ihrem Verschwinden, also wäh-

rend 80 bis 90 Secunden beobachtet wurden, die Figur der rechtwinkligen Composition der Schwingungen von 1:4 durchaus nicht die geringste Drehung wahrnehmen liess.

Somit machten nun also die Gabel des Apparates C und die oben beschriebene Gabel  $\bar{c}$  bei 20 Centigrad Wärme genau 128 und 512 v. s.

Der Umstand, dass die optische Figur der beiden Schwingungsbewegungen bis zum Verschwinden der Schwingungen der Gabel  $\bar{c}$  durchaus keine Drehung wahrnehmen liess, zeigte zugleich auch an, dass die Schwingungen dieser Gabel während der ganzen Zeit, in der sie tönte, isochron waren, was von der grössten Wichtigkeit ist, denn da die Bestimmungen äusserst kleiner Tonunterschiede immer auf der Beobachtung der optischen Figur, oder dem Zählen der Stösse zweier Gabeln während einer längern Zeitdauer beruhen, so würde die Richtigkeit derselben durchaus illusorisch sein, wenn die Tonhöhe dieser Gabeln während der Zeit des Experiments eine Aenderung erlitt, wie dieses schon von Scheibler an Gabeln von unpassender Form beobachtet worden war, deren Zinken, statt parallel zu sein, sich nach den Enden zu mehr schlossen oder öffneten, und wie dieses auch mitunter, obgleich in weit geringerem Maasse, durch die Befestigung der Gabel auf einem Resonanzkasten bewirkt werden kann. — Ich sagte hier ausdrücklich „mitunter“, denn der Einfluss der Resonanzkästen auf die Schwingungen der Gabel ist im allgemeinen sehr verschieden. — Wenn der Eigenton des Kastens von dem Tone der Stimmgabel noch ziemlich weit entfernt ist, obgleich schon nahe genug, um ihn gut zu verstärken, so lässt sich oft nicht der geringste Einfluss desselben auf die Schwingungen der Gabel nachweisen, und die Gabel tönt lange und mit gleichmässig abnehmender Stärke bis zum Verschwinden ihres Tones; ist dagegen der Ton des ganzen Systems, welches durch die Luftmasse und die Decken mit der Belastung der Gabel gebildet wird, dem Eigentone der Stimmgabel zu nahe und auch

sons  
star  
frei  
bef  
nehr  
gest  
sage  
Inter  
es b  
von  
sind  
merl  
in d  
so b  
nism  
nur  
Nac  
wen  
stell  
Stär  
festi  
wür  
fluss  
zu k  
peri  
des  
offe  
dem  
eine  
Oef  
12  
führ  
Unt  
0,05  
  
stär  
Res



sonst noch in gewissen Verhältnissen, welche ein sehr starkes Mitschwingen befördern, so lässt die Gabel, welche frei in der Hand gehalten, oder, auf einem soliden Ständer befestigt, 60 bis 90 Secunden lang mit gleichmässig abnehmender Intensität vibriren würde, mit dem Bogen angestrichen, erst einen ganz lauten Ton hören, ich möchte sagen, sie schreit förmlich auf, dieser verliert aber seine Intensität sehr bald, etwa schon nach 20 Secunden, und es bleiben dann nur noch für einige Zeit Schwingungen von ganz geringer Amplitude übrig, welche zu schwach sind, um noch die Schwingungen des Resonanzkastens merklich erregen zu können. Wenn der Resonanzkasten in dieser Weise auf die Schwingungsdauer der Gabel wirkt, so bleibt er auch nie ganz ohne Einfluss auf den Isochronismus und die Zahl ihrer Schwingungen, obgleich ersterer nur so klein ist, dass man geneigt sein könnte, den Nachweis desselben Beobachtungsfehlern zuzuschreiben, wenn man nur in der Weise die Untersuchungen anstellte, dass man die Gabel abwechselnd auf einem festen Ständer, und dann wieder auf einem Resonanzkasten befestigte, wo es allerdings an Fehlerquellen nicht mangeln würde. Ich habe jedoch Gelegenheit gehabt, diesen Einfluss eines Resonanzkastens auf die Schwingungen der Gabel zu beobachten, während sie gar nicht zwischen zwei Experimenten angerührt wurde, indem ich nur den Eigenton des Kastens dadurch veränderte, dass ich die Hand seinem offenen Ende mehr oder weniger näherte, wo dann die mit dem Vibrationsmikroskop beobachtete optische Figur, welche eine Schwankung in 20 Secunden sehen liess, wenn die Oeffnung des Kastens ganz frei gelassen wurde, nur noch 12 Secunden brauchte, um dieselbe Schwankung auszuführen, wenn ich die Oeffnung zudeckte, was also einen Unterschied der Schwingungszahlen in beiden Fällen von 0,033 v. s. in der Secunde anzeigte.

Auch wenn man, um den Ton der Stimmgabel zu verstärken, diese, statt auf einem Resonanzkasten vor einem Resonator mit starken Wänden, deren Schwingungen ganz

vernachlässigt werden können, befestigt, sodass der resonirende Körper allein in der Luftmasse besteht, zeigt sich eine Einwirkung des Resonanztones auf die Schwingungsbewegung der Gabel, die sich in diesem Falle genauer in ihrem ganzen Wesen untersuchen lässt. — Für diese Experimente war die Stimmgabel  $\bar{c}$  ( $U_{t_3} = 512$  v. s.) auf einer Eisenplatte befestigt, und einige Millimeter hinter ihr eine Resonanzröhre von Messing, welche 12 cm im Durchmesser hatte, vorne einen Deckel mit einer 25 mm breiten und 11 cm langen Oeffnung trug und hinten einen verschiebbaren Stempel, durch den der Ton in genügenden Grenzen abgeändert werden konnte. — Die Gabel, auf ihrer Eisenplatte ohne Resonator geprüft, vibrirte gut während etwa 90 Sekunden; befand sich jedoch der Resonator hinter ihr, und erhöhte man den Eigenton desselben, von einem beträchtlich tiefern als dem der Stimmgabel ausgehend, mehr und mehr, so konnte man folgenden Vorgang beobachten. — Schon wenn der Resonatorton noch eine kleine Terz tiefer als die Stimmgabel war, also auf  $a$  ( $la_2$ ) stimmte, liess sich eine kleine Verringerung der Schwingungsdauer und gleichzeitig eine geringe Erhöhung der Schwingungszahl, etwa um 0,011 v. s., wahrnehmen. Je mehr von hier ab dann der Eigenton des Resonators sich dem der Stimmgabel näherte, je mehr nahm die Schwingungsdauer der Gabel ab und ihre Höhe zu, bis ganz nahe zu dem vollständigen Einklange beider Töne; war dieser jedoch wirklich erreicht, so verschwand plötzlich die Erhöhung der Schwingungszahl der Gabel ganz und gar, und sie zeigte dieselbe Stimmung, wie wenn sie ganz frei ohne Resonator vibrirte. Der Ton war dabei mächtig angeschwollen, nahm jedoch sehr schnell an Intensität ab und dauerte im ganzen nur etwa 8 bis 10 Sekunden. Nach einer geringen Erhöhung des Resonatortones trat dann wieder eine gleich grosse, aber entgegengesetzte Verstimmung der Gabel ein, d. h. sie zeigte sich nun um so viel tiefer geworden, als sie bei etwas tieferem Resonatortone vor der Erreichung des reinen Einklangles höher gewesen war, und diese Vertiefung wurde

dann  
gerin  
lich

ment

rates  
für  
es si  
jeder

gung  
unte  
zu k  
erste  
drei  
von  
Tag  
wäh  
lesun  
mitt  
wur  
tung  
ware  
Tem  
konr

dann bei immer grösserer Höhe des Resonatortones immer geringer, während die Schwingungsdauer der Gabel schliesslich wieder bis zu 80 und 90 Secunden anwuchs.

In folgender Tabelle habe ich die bei diesen Experimenten gefundenen Mittelwerthe zusammengestellt:

Stimmgabelton	Resonatorton	Schwingungsdauer d. Stimmgabel in Secund.	Veränderung der Schwingungszahl der Stimmgabel
$\bar{c}$	$a$	80	+0,011 v. s.
"	$ais$	60	+0,017 "
"	$h$	30	+0,033 "
"	496 v. s.	20	+0,071 "
"	$\bar{c}$	8—10	0 "
"	528 v. s.	18	—0,071 "
"	$\bar{cis}$	22	—0,058 "
"	$\bar{d}$	45	—0,030 "
"	$\bar{dis}$	70	—0,017 "

Nachdem die Schwingungszahlen der Gabel des Apparates  $C$  und der Normalgabel  $\bar{c}$  mit absoluter Genauigkeit für die Temperatur von 20° C. hergestellt waren, fragte es sich, welches die Schwingungszahlen dieser Gabeln bei jeder beliebigen andern Temperatur sein würden.

Um den Einfluss eines Wärmegrades auf die Schwingungszahl der Stimmgabel des Apparates aus dem Gangunterschiede der Uhr und des Chronometers bestimmen zu können, machte ich in den Monaten von Juli bis in die erste Hälfte des Decembers des laufenden Jahres zwischen drei und vierhundert Beobachtungen, welche eine Anzahl von Reihen bilden, von denen sich einige über mehrere Tage und Nächte hintereinander erstreckten. Da jedoch während der Nächte nur wenige, und öfters gar keine Ablesungen gemacht waren, und somit die Bestimmung der mittlern Temperatur während der Nachtstunden unsicher wurde, zog ich es schliesslich vor, nur die Tagbeobachtungen zu benutzen, welche in 66 Gruppen enthalten waren. Wegen der Kleinheit und der Langsamkeit des Temperaturwechsels während jeder Beobachtungsperiode konnte wohl angenommen werden, dass die Temperatur

der Stimmgabel, wenn auch natürlich nicht in jedem Augenblick mit der Temperatur der Luft, so doch durchschnittlich mit der mittlern Temperatur derselben während der Zeit der Beobachtungen genügend gut übereinstimmte, und sollte in den Morgenstunden die Gabel gewöhnlich etwas kälter gewesen sein, so würden die hieraus entstandenen Fehler der Resultate, welche von Beobachtungen bei Temperaturen über  $20^{\circ}$  Wärme, und von solchen bei Temperaturen unter  $20^{\circ}$  Wärme abgeleitet wurden, sich doch zum grössten Theil gegenseitig aufheben müssen.

Da in den Fällen, in denen die Temperatur  $20^{\circ}$  Wärme zu nahe ist, die geringste Ungenauigkeit der Ablesung sofort zu den unrichtigsten Resultaten führen würde, so habe ich aus den erwähnten Beobachtungsreihen alle ausgeschieden, bei denen die mittlere Temperatur nicht unter  $19^{\circ}$  oder über  $21^{\circ}$  Wärme betrug, sodass nur 48 übrig blieben, welche zwei Serien bilden, und von denen eine, von Ende Juli bis Ende August, 14 Beobachtungsreihen bei Temperaturen von  $+21^{\circ}$  bis  $+26,1^{\circ}$  enthält, und die andere, von Ende September bis Mitte December, 34 Beobachtungsreihen bei Temperaturen von  $3,1^{\circ}$  bis  $17^{\circ}$ . In folgender Tabelle habe ich alle 48 Beobachtungsreihen verzeichnet, und es bedeutet in derselben: *A* die Anzahl der Ablesungen; *B* die Dauer der Beobachtungen in Stunden; *C* den Gangunterschied der Uhr und des Chronometers während der ganzen Zeit des Experiments in Secunden, *D* denselben Gangunterschied für die Dauer einer Stunde in Secunden, *E* die äussersten Grenzen der Temperatur während der Dauer des Experiments, *F* die mittlere Temperatur während der Dauer des Experiments; *G* den Einfluss von einem Centigrad in einer Stunde auf den Gang der Uhr.

Wie man aus nachstehender Tabelle ersieht, ist der Einfluss eines Centigrades Wärme in einer Stunde auf den Gang der Uhr, abgeleitet allein aus den 14 Beobachtungsreihen bei Temperaturen über  $+21^{\circ} = \frac{5,60}{14} = 0,400$



Secunden, abgeleitet allein aus den 34 Beobachtungsreihen bei Temperaturen unter  $+19^{\circ} = \frac{13,75}{34} = 0,404$  Secunden, und wenn man die Beobachtungen über  $+21^{\circ}$  und unter  $+19^{\circ}$  zusammennimmt  $= \frac{13,75 + 5,60}{48} = 0,403$  Secunden.

Die Aenderung der Tonhöhe der Gabel  $C = 128$  v. s., welche durch einen Gangunterschied der Uhr von einer Secunde in der Stunde angezeigt wird, beträgt aber  $\frac{128}{3600} = 0,0356$  v. s. und also für einen Gangunterschied von 0,403 Secunden,  $0,0356 \cdot 0,403 = 0,0143$  v. s.

Um dieses Resultat auch bei Temperaturen, welche über die Grenzen der direct beobachteten hinausgehen, mit Sicherheit anwenden, und auch bei Stimmgabeln von verschiedener Stärke und verschiedener Tonhöhe, verwerthen zu können, war es nöthig, direct zu untersuchen, ob der Temperatureinfluss auch bei bedeutend grösserer Wärme oder Kälte noch proportional bleibt, wie er es in den Temperaturgrenzen zu sein scheint, in denen obige Beobachtungen gemacht wurden, ferner, ob die Wirkung der Wärme auf Gabeln von gleicher Tonhöhe aber verschiedener Masse dieselbe ist, und schliesslich, ob nahezu gleichgeformte Stimmgabeln von verschiedener Tonhöhe im Verhältniss ihrer Schwingungszahlen von der Temperatur beeinflusst werden.

Ich wendete bei diesen Experimenten einen Kasten mit sehr dicken Holzwänden an, dessen Boden aus einer Eisenplatte bestand, welche durch einen untergesetzten kleinen Gasapparat beliebig erhitzt werden konnte. Die Vorderwand wurde durch eine starke Spiegelglasscheibe gebildet, und in der Decke befand sich eine Oeffnung, in welche eine dickwandige Glasröhre eingesetzt war, deren aus dem Kasten hervorragendes Ende nach Belieben offen gelassen oder durch einen Kork geschlossen werden konnte.

— Die Temperatur der Luft in diesem Kasten war natürlich je nach der Entfernung von der geheizten Bodenplatte sehr verschieden, sie konnte jedoch an derselben Stelle leicht während langer Zeit constant erhalten werden, oder

vielmehr in geringen Grenzen um denselben Wärmegrad oscillirend, indem man die Gasflammen verkleinerte oder vergrösserte, auch die Glasröhre in der Decke offen liess oder schloss, je nachdem das Thermometer über den gewünschten Wärmegrad zu steigen oder zu sinken anfang.

Um zu sehen, ob der Wärmeeinfluss auf die Gabel bei in weiteren Grenzen verschiedenen Temperaturen derselbe bleibt, wendete ich zuerst eine Gabel  $C(U_1)=128$  v. s. an, die in Grösse und Form der des Apparates vollständig gleich war, auch einen eben solchen Spiegel mit Gegengewicht und eine gleiche Stimmvorrichtung trug. Da die Dimensionen des Kastens nicht gestatteten, sie in ihrer ganzen Länge der Eisenplatte parallel zu befestigen, so wurde sie an der Decke desselben vertical mit den Zinken nach unten disponirt, wobei diese also durch sehr verschieden warme Luftschichten reichten, sodass demnach nur von vergleichenden Experimenten, aber in keiner Weise von absoluten Bestimmungen die Rede sein konnte. Die Schwingungen der Gabel, am Kasten selbst durch eine einfache Vorrichtung erregt, wurden in der bekannten Weise optisch beobachtet, indem ein Lichtstrahl auf ihren Spiegel und von diesem auf den Spiegel einer zweiten, vorher mit ihr im Unisono gestimmten, geleitet wurde, die in genügender Entfernung von dem Kasten horizontal aufgestellt war und also, wenn die Gabeln vibrirten, die Ellipse sehen liess, welche durch ihre Schwankungen jede Abweichung von der ursprünglichen Tonhöhe der Stimmgabel im Kasten anzeigte. — War die Temperatur im Kasten an der Decke in der Nähe der Biegung der Gabel während mehrerer Stunden um  $5^{\circ}$  wärmer erhalten, als die im Zimmer, welche  $23^{\circ}$  betrug, so wurde die Gabel um 1 v. s. in 10 Secunden vertieft, betrug der Unterschied der Temperatur im Kasten an derselben Stelle und im Zimmer aber  $25^{\circ}$ , so entstand eine Vertiefung um 1 v. s. erst in 2,37 Secunden, statt in 2, wie die Resultate bei der Temperaturdifferenz von  $5^{\circ}$  erwarten liessen.

Noch zahlreichere Versuche in derselben Richtung

stellte ich mit einer Gabel  $\bar{c}$  ( $U_3$ ) = 512 v. s. an. Diese wurde horizontal, parallel zu der erwärmten Platte befestigt, und die Enden ihrer Zinken reichten bis dicht vor die Glasplatte, sodass ihre Schwingungen mit dem Vibrationsmikroskop beobachtet werden konnten, welches natürlich immer nur für die kurze Zeit der Beobachtung der Glasplatte genähert, sonst aber in genügender Entfernung vom Kasten gehalten wurde. Das Thermometer reichte mit seinem Quecksilberbehälter bis zwischen die Zinken der Gabel. Die Temperatur im Zimmer betrug durchschnittlich  $+26^\circ$ , und eine Erhöhung derselben im Kasten um  $5^\circ$  ergab für den Einfluss eines Wärmegrades 0,059 v. s., eine Erhöhung von  $10^\circ$  ergab 0,055, und die von  $15^\circ$ , 0,054 v. s. als mittlere Werthe. Bei nur zwei Experimenten, bei welchen der Temperaturunterschied bis zu  $30^\circ$  gesteigert worden war, erhielt ich einmal für den Einfluss eines Wärmegrades 0,053 v. s., das andere mal 0,055 v. s., sodass der Mittelwerth gleich dem bei der Temperaturdifferenz von  $15^\circ$  gefundenen war.

Man ersieht aus allen diesen Ergebnissen, dass es sich hier immer nur um sehr kleine Differenzen handelt, deren Grösse schon in die Grenzen der Beobachtungsfehler fallen kann, und dass man also jedenfalls praktisch, wenigstens bis zu  $50^\circ$  bis  $60^\circ$  Wärme, den Einfluss der Wärme auf eine Stimmgabel als constant betrachten kann. Die grosse Sorgfalt jedoch, mit der ich die zahlreichen Versuche ausgeführt, deren summarische Resultate ich oben gegeben, und die geringen Abweichungen der einzelnen Beobachtungen voneinander und von den aus ihnen gezogenen Mitteln lassen annehmen, dass der Wärmeeinfluss bei verschiedenen hohen Temperaturen nicht absolut derselbe bleibt, sondern bei immer höher werdenden Temperaturen etwas kleiner wird.

Was den Einfluss der Wärme auf Gabeln von gleicher Tonhöhe aber verschiedener Masse anlangt, so gaben zwei Gabeln  $\bar{c}$  = 512 v. s. mit Zinken von 6 bis 4 mm Dicke, welche bei  $+20^\circ$  genau im Einklang gestimmt waren,



nachdem sie 5 Stunden lang in dem Kasten, parallel zur Bodenplatte und in gleicher Entfernung von derselben, einer Temperatur von  $50^{\circ}$  ausgesetzt gewesen waren, miteinander annähernd eine Schwebung in 6 Secunden, zwei Gabeln  $\bar{c}$  ( $U_4$ ) mit 7 und 3 mm Zinkendicke, unter gleichen Verhältnissen zu  $45^{\circ}$  erhitzt, eine Schwebung in 5 Secunden, und zwei Gabeln  $\bar{c}$  ( $U_5$ ), welche 7 und 5 mm dicke Zinken hatten, ebenfalls zu  $45^{\circ}$  erhitzt, eine Schwebung in 4 Secunden, welche Werthe den Unterschied des Einflusses von einem Wärmegrade für diese drei Gabelpaare zu annähernd 0,011 v. s., 0,016 v. s. und 0,02 v. s. bestimmen. — Dabei waren es immer die stärkeren Gabeln, welche am meisten von der Wärme influencirt und somit am tiefsten geworden waren.

Da es mir bei diesen Experimenten nicht auf eine äusserst genaue Bestimmung der Tondifferenz bei den erhitzten Gabelpaaren ankam, so wurden die Gabeln nicht im Kasten selbst zum Tönen gebracht, sondern ausserhalb desselben entweder nacheinander einzeln geprüft, oder beide zugleich aus dem Kasten genommen und auch zusammen angeschlagen. Dabei war es denn bemerkenswerth, dass während einer sehr kurzen Zeit nach ihrer Entfernung aus dem Kasten die Differenz ihrer Tonhöhe etwas zunahm, weil wahrscheinlich die dünnere Gabel sich schneller abkühlte und somit schneller höher wurde, als die tiefere dicke.

Um den Unterschied in der Aenderung der Tonhöhe verschieden starker Stimmgabeln bei noch grösseren Temperaturveränderungen zu beobachten, machte ich eine Reihe Versuche, indem ich die betreffenden Stimmgabeln zusammen in Eiswasser erkältete und in kochendem Wasser erhitzte, und die ganze Aenderung ihrer Tonhöhe bei diesem grossen Temperaturwechsel bestimmte. Dieses Letztere war nicht leicht, da zu allen anderen Uebelständen dieser Methode noch der Umstand hinzutritt, dass die bis zur Temperatur des kochenden Wassers erhitzten Gabeln nur noch eine ausserordentlich kurze Schwingungsdauer haben und nach dem Anschlagen gleich wieder aufhören zu

vibriren. Von einer grossen Genauigkeit der absoluten Werthe konnte daher hier noch weniger die Rede sein, als bei den Versuchen im geheizten Kasten, aber diese Experimente dienten doch dazu, das schon gefundene Resultat, dass nämlich die dickeren Stimmgabeln stärker von der Wärme beeinflusst werden, als dünne, noch bestimmter festzustellen. So betrug der Unterschied in der Aenderung der Tonhöhe bei den beiden schon erwähnten Stimmgabeln  $\bar{c}$  ungefähr 1,5 v. s. und bei den beiden Gabeln  $\bar{c}$  1,8 v. s., wobei wieder die dickeren Gabeln immer diejenigen waren, welche den grössten Einfluss erlitten.

Dieses Resultat ist darum interessant, weil die Frage vorlag, worin eigentlich der hauptsächliche Grund der Wirkung der Wärme auf die Stimmgabel läge, da diese Wirkung offenbar doppelter Natur sein muss, indem durch die Wärme nicht nur die Länge der Zinken der Gabel, sondern auch ihre Elasticität verändert wird. Da nun bei verschieden starken Gabeln für denselben Ton die Länge im Verhältniss zur Dicke ihrer Zinken um so kleiner wird, als diese letztere zunimmt, so müsste der Einfluss der Temperatur auf die Tonhöhe bei dünnen Gabeln grösser sein, im Falle die Veränderung der Länge der Zinken die vornehmste Ursache der Aenderung der Tonhöhe wäre, und bei dickeren Gabeln bedeutender, wenn die Aenderung der Elasticität bei der ganzen Erscheinung die grösste Bedeutung hätte, durch die beschriebenen Beobachtungen ist nun aber festgestellt, dass dieses letztere wirklich der Fall sei.

Da verschieden starke Stimmgabeln von gleicher Tonhöhe etwas verschieden von der Wärme beeinflusst werden, so geht hieraus auch hervor, dass das Intervall, welches zwei Stimmgabeln von beliebiger Stärke und Tonhöhe bilden, meistens nicht ganz unverändert bleiben wird, wenn die Temperatur wechselt. Wendet man jedoch Gabeln an, welche nicht zu sehr in der Stärke und Form voneinander abweichen, so wird die Störung des Intervalls zweier Stimmgabeln durch den Temperaturwechsel so ausserordent-

lich  
werde  
bei 2  
aus  
diesel  
1 : 4  
45 S  
vall,  
kann  
Wär  
zu s  
prop

gefun  
Wär  
allge  
Stim  
Wär

Norm  
ratur  
0,057

Stim  
welc  
Tem  
ihr  
wahr  
bei  
Wär  
bew  
grad

sorg  
inde  
Wä

lich gering, dass sie gar nicht in Rechnung gezogen zu werden braucht. So zeigte z. B. eine Stimmgabel  $\bar{c}$ , welche bei  $20^\circ$  Wärme mit der Gabel  $C$  des Apparates eine durchaus reine Doppeloctave bildete, bei  $+12^\circ$  optisch durch dieselbe Gabel beobachtet, nur eine Schwankung der Figur 1:4 in 50 Secunden, und bei  $9^\circ$  eine Schwankung in 45 Secunden, welche Abweichungen von dem reinen Intervall, resp. 0,020 v. s. und 0,022 v. s. entsprechen. Man kann also im allgemeinen unbedingt annehmen, dass der Wärmeeinfluss auf verschieden hohe Stimmgabeln von nicht zu sehr verschiedener Stärke ihren Schwingungszahlen proportional ist.

Da der für die Gabel des Apparates,  $C = 128$  v. s., gefundene Werth für den Einfluss von einem Centigrad Wärme  $= 0,0143$  v. s. ist, so kann man nun also ganz im allgemeinen sagen, dass die Schwingungsperiode einer Stimmgabel durch die Temperaturdifferenz eines Centigrad Wärme um  $\frac{1}{8913}$  vergrößert oder verringert wird.

Die Aenderung aber, welche speciell die Tonhöhe der Normalgabel  $Ut_3 = 512$  v. s. bei  $20^\circ$  durch die Temperaturdifferenz eines Centigrad Wärme erleidet, beträgt 0,0572 v. s.

Diese in oben beschriebener Weise mit Hülfe der Stimmgabeluhr construirte Normalgabel mit der Gabel  $\bar{c}$ , welche bisher als Etalon gedient, bei durchaus gleicher Temperatur verglichen, ist tiefer als diese und lässt mit ihr 11 Schwebungen in 62 Secunden hören, wodurch die wahre Schwingungszahl der alten Gabel zu 512,3548 v. s. bei 20 Centigrad Wärme bestimmt wird. Da ein Grad Wärme eine Vertiefung derselben Gabel um 0,0572 v. s. bewirkt, so macht sie  $512$  v. s. bei  $20 + \frac{0,3548^0}{0,0572} = 26,2$  Centigrad Wärme.

Dieses letzte Resultat habe ich noch durch einige sehr sorgfältig ausgeführte directe Versuche bestätigt gefunden, indem ich eine Gabel  $Ut_3$ , mit der alten Stimmung, in dem Wärmekasten durch sehr lange fortgesetzte langsame Er-

wärmung bis zum vollkommenen Einklang mit der neuen Gabel brachte, und dann diesen Einklang während einer längern Zeit zu bewahren suchte, wobei ich einen Temperaturunterschied zwischen der Luft im Kasten und der des Zimmers von etwas über  $6^{\circ}$  und unter  $6,5^{\circ}$  fand.

Will man also bei einer beliebigen Temperatur die richtige Schwingungszahl seiner Gabel wissen, so muss man, je nachdem man eine Gabel von 512 v. s. bei  $20^{\circ}$  oder bei  $26,2^{\circ}$  anwendet, den Unterschied dieser Temperatur in Graden mit der von  $20^{\circ}$  oder  $26,2^{\circ}$  nehmen, diese Zahl mit 0,0572 multipliciren und den gefundenen Werth, wenn die Temperatur unter resp.  $20^{\circ}$  und  $26,2^{\circ}$  war, zu 512 v. s. zuschlagen, im entgegengesetzten Falle aber von 512 v. s. abziehen.

Um diese Rechnung zu vermeiden, schien es mir zweckmässig, eine Gabel so einzurichten, dass sie bei jeder Temperatur genau 512 v. s. geben könne. Ich versah zu diesem Zwecke jede Zinke derselben mit einer kleinen Scheibe, welche um ihr Centrum gedreht und in jeder Stellung befestigt werden konnte, und befestigte an ihren Rändern ein kleines Gewicht, welches gestattete, durch eine halbe Umdrehung der Scheibe die Schwingungszahl der Gabel von 511,142 v. s. bis zu 512,858 v. s. bei  $20^{\circ}$  zu verändern. Bei der höchsten Stellung der Gewichte, bei der die Gabel bei  $20^{\circ}$  511,142 v. s. macht, muss die Temperatur also  $15^{\circ}$  unter  $20^{\circ}$  sinken, damit die Schwingungszahl 512 v. s. werden könne, und ebenso muss die Temperatur  $15^{\circ}$  über  $20^{\circ}$  steigen, wenn die Gabel bei der tiefsten Stellung der Gewichte 512 v. s. geben soll. Auf dem Rande der Scheiben ist angegeben, welche Stellung ihnen bei jeder Temperatur zwischen  $5^{\circ}$  und  $35^{\circ}$  gegeben werden muss, damit die Schwingungszahl der Gabel genau 512 v. s. werde. — Laufgewichte, mit denen ich zuerst dasselbe Resultat zu erreichen gesucht, hatten sich als weniger praktisch ergeben, da sie nicht ohne Schwierigkeit mit gehöriger Solidität so äusserst leicht construirt werden konnten, als es nöthig gewesen wäre, wenn sie die geringe Tonverän-

derun  
sollte

Wär  
einer  
ches  
gabel  
sique

10 v.  
stellt  
optis  
man  
hält.

Gab  
selbe  
oder  
sein,  
hat  
gleich  
Secu  
cun  
870

zösi  
dem  
selb  
zahl  
Wä  
auf  
870

ma  
ang  
im  
das  
mit

derung bei einer genügend weiten Verschiebung bewirken sollten.

Von der Normalgabel  $\bar{c} = 512$  v. s. bei 20 Centigrad Wärme kann man mit Leichtigkeit auf folgende Weise zu einer Gabel von 870 v. s. bei 15° Wärme gelangen, welches bekanntlich die Stimmung der französischen Normalgabel  $\bar{a}$  ( $La_3$ ) sein soll, die sich im Conservatoire de musique et de déclamation zu Paris befindet.

Man stimmt vermittelst der Stösse eine Gabel um 10 v. s. höher als die Gabel  $\bar{c} = 512$  v. s. bei 20° und stellt zwischen dieser Gabel von 512 v. s. und einer zweiten optisch das absolut reine Verhältniss von 3 : 5 her, wo man dann eine Gabel von 870 v. s. bei 20° Wärme erhält. — Da nun der Einfluss eines Wärmegrades auf eine Gabel von 870 v. s. = 0,0972 v. s. ist, so würde diese selbe Gabel bei 15°  $870 + 5 \cdot 0,0972 = 870,486$  v. s. machen, oder sie müsste bei 20° um 0,486 v. s. tiefer als 870 v. s. sein, um bei 15° genau 870 v. s. geben zu können. Man hat also nur mit der Gabel von 870 v. s. bei 20° bei gleicher Temperatur eine zweite um 0,486 v. s. in der Secunde oder um 15 Schwebungen in  $61\frac{1}{2}$  bis 62 Secunden tiefer zu stimmen, um die gewünschte Gabel von 870 v. s. bei 15 Centigrad Wärme zu erhalten.

Eine in dieser Weise construirte Gabel mit der französischen Normalgabel im Conservatoire verglichen, nachdem sie einige Tage lang neben dieser gelegen hatte, um dieselbe Temperatur anzunehmen, ergab für die Schwingungszahl der französischen Normalgabel bei 15 Centigrad Wärme 870,9 v. s., und da der Wärmeeinfluss eines Grades auf eine Gabel von 870 v. s. = 0,0972 v. s., so würde sie 870 v. s. bei 24,26 Centigrad Wärme machen.

Wenn ich diese Zahlen, welche die französische Normalgabel betreffen, nicht mit ganz derselben Genauigkeit angebe, als ich es sonst im Laufe dieser Untersuchungen immer gethan habe, so hat dieses seinen Grund darin, dass diese Gabel nur etwa 20 Secunden lang Schwebungen mit einer andern Gabel gut zu zählen gestattet, was jeden-

falls von der Wirkung des Resonanzkastens herrührt, auf dem sie befestigt ist. Nach dem Tone der Stimmgabel, und auch nach der Art seines Verklingens zu urtheilen, scheint dieser nämlich in ziemlich hohem Grade die Eigenschaften zu besitzen, bei denen, wie ich oben angegeben, ein Resonanzkasten eine starke Einwirkung auf die Schwingungen der Gabel ausübt, und wollte man daher eine sehr genaue Bestimmung der Differenz der Schwingungszahlen zwischen dieser officiellen Gabel und einer andern machen, so würde man wahrscheinlich gezwungen sein, sie von ihrem Kasten zu entfernen. Eine solche sehr weit getriebene Genauigkeit würde aber in diesem Falle wohl nicht einmal von einem grossen Interesse sein, da die Experimente nicht veröffentlicht worden sind, auf denen die Angabe der Schwingungszahl von 870 v. s. bei 15 Centigrad Wärme für diese Gabel beruht und sich somit von vornherein jeder Discussion entziehen.

Es sind im Laufe der letzten Jahre eine Reihe Bestimmungen der absoluten Schwingungszahl meiner Gabel, welche  $ut_3 = 512$  v. s., ohne Angabe der Temperatur, markirt war, von verschiedenen Gelehrten veröffentlicht worden, welche alle nur wenig voneinander abweichen. So fand Prof. A. M. Mayer in Hoboken<sup>1)</sup> mittelst der graphischen Methode  $Ut_3 = 255,96$  v. d. bei 60° F. als Mittelwerth von sechs Experimenten, deren äusserste Werthe 255,94 v. d. und 256,2 v. d. waren, und die Verzögerung oder Beschleunigung der Schwingungsperiode für den Temperaturunterschied von 1° F. =  $\frac{1}{32000}$ ; Dr. R. C. Cooley<sup>2)</sup>, ohne Temperaturangabe, mit seinem electric register, bei 15 Experimenten immer  $ut_3 = 256$  v. d.; Lord Rayleigh<sup>3)</sup>, ohne Temperaturangabe, mit einem gewöhnlichen Harmonium,  $Ut_1 = 63,98$  v. d. bis 64,06 v. d., endlich

1) Mayer, Amer. Journ. of Science. Aug. 1877.

2) Cooley, Journ. of the Franklin Institute. Sept. 1877.

3) Rayleigh, Nature, p. 275. London, Jan. 1879.

Prof. McLeod und Lieut. Clarke<sup>1)</sup>, ebenfalls ohne Temperaturangabe, mit Hülfe ihres Cycloscops,  $U_3 = 256,281$  v. d. bis  $256,287$  v. d., und durch Experimente mit einem geheizten Kasten die Vertiefung einer Gabel durch 1 Centigrad Wärme =  $0,011$  Proc.

Eine Ausnahme von diesen, dem wahren Werthe sehr nahe kommenden Resultaten macht nur die Bestimmung des Hrn. Prof. Preyer, der  $U_3 = 258,2$  v. d. fand und erklärte, dass „die erste Decimale dieser auf eine Secunde bezogenen Schwingungszahl als völlig zuverlässig feststände“<sup>2)</sup>, während selbst die Zahl der ganzen Doppelschwingungen um zwei Einheiten von dem wahren Werthe abweicht. Dieses auffällige Resultat findet aber seine Erklärung in der Anwendung bei den Experimenten eines Tonometers, bei welchem die einzelnen Töne, statt durch Stimmgabeln, von Harmoniumzungen gebildet wurden, die auf demselben Brette befestigt und in derselben Luftmasse eingeschlossen, beim Zusammenklingen sich gegenseitig influenzirten, etwa in der Art, wie es die Pendel in den bekannten Pendelversuchen von Savart thun, wodurch das Instrument, wenn man diese Fehlerquelle unberücksichtigt lässt, zur genauen Bestimmung der Schwingungszahl vollständig unbrauchbar wird. — Hr. A. J. Ellis hat später ähnliche Resultate veröffentlicht<sup>3)</sup>, zu denen ihn die Benutzung eines Apparates derselben Art geführt hatte, doch von Lord Rayleigh auf die muthmassliche Fehlerquelle bei seinen Bestimmungen aufmerksam gemacht<sup>4)</sup>, hat Hr. Ellis diese seitdem schon selbst erkannt und angekündigt, dass die von ihm gefundenen Werthe einer Correctur zu unterwerfen wären.<sup>5)</sup>

Paris, December 1879.

1) McLeod u. Clarke, Proc. of the Cambridge Phil. Soc. Dec. 1877.

2) Preyer, „Ueber die Grenzen der Tonwahrnehmung“, p. 46. Jena 1876.

3) Ellis, Soc. of Arts. 23. May 1877. — Nature, p. 85. London 1877.

4) Rayleigh, Nature, p. 12. London 1877.

5) Ellis, Nature, p. 26. London 1877.

**IV. Untersuchungen über die equipotentielle Vertheilung der magnetischen Fluida cylindrischer Stahlstäbe; von W. Schaper.**

**I. Historische Notizen.**

Es ist schon mehrfach der Versuch gemacht worden, auf experimentellem Wege die Vertheilung des Magnetismus in Stahlstäben zu ermitteln, ohne dass bislang endgültige Resultate erreicht wurden. Von allen Methoden scheint diejenige am geeignetsten zu sein, die den Magnetismus aus den von ihm in Drahtkreisen inducirten Strömen bestimmt, weil sie eine grosse Schärfe bezüglich der Beobachtungen wie der mathematischen Behandlung gestattet.

Lenz und Jacobi waren die ersten, welche diese Methode anwandten, und zwar auf Electromagnete. Ihre Arbeiten sind schon öfter besprochen.

Insbesondere benutzte R. v. Rees ihre Beobachtungen. Dieser suchte nachzuweisen, dass der freie Magnetismus nach dem Gesetze  $y = B(m^2 - m^{-2})$  vertheilt sei, wenn  $z$  die Entfernung der Punkte des Magnets von der Mitte bedeutet. Uebrigens erregt es Bedenken, dass v. Rees den in der Inductionsrolle inducirten Strom sich nur durch das unmittelbar unter derselben befindliche magnetische Moment entstanden denkt.

Bei der Untersuchung von Stahlmagneten wandte v. Rees folgendes Verfahren an. Er bewegte eine Inductionsrolle von dem zu untersuchenden Punkte  $z_1$  fort über das Ende des Magnets hinaus und setzte den entstehenden Strom proportional  $\int y dz$ , worin  $y$  wie oben den freien Magnetismus in  $z$  bedeutet. Auch hier ist den bestehenden Verhältnissen nicht genügend Rechnung getragen worden. Wir denken uns nämlich die Bewegung der Inductionsrolle von  $z_1$  bis über das Ende des Stabes in Theile zerlegt.



$$\int_{z_1}^l y dz = \int_{z_1}^{z_2} y dz + \int_{z_2}^{z_3} y dz + \dots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} y dz + \int_{z_n}^l y dz.$$

Während der Bewegung von  $z_1$  bis  $z_2$  wirken die Theile des Stabes, die diesem Intervall nahe liegen, von  $z_1 - \zeta_1$  bis  $z_2 + \zeta_2$  u. s. f., bis z. B. auf dem Wege von  $z_{n-2}$  bis  $z_{n-1}$  das Intervall von  $z_{n-2} - \zeta_{n-2}$  bis  $z_{n-1} + \zeta_{n-1} = l$  inducirt. Bei der nun folgenden Bewegung von  $z_{n-1}$  bis  $z_n$  inducirt  $z_{n-1} - \zeta_{n-1}$  bis  $l$ , bei der letzten von  $z_n$  bis  $l$  inducirt  $z_n - \zeta_n$  bis  $l$ . Die dann noch folgende Entfernung der Rolle vom Stabe bringt einen Strom  $S$  hervor. Wir sehen also, dass zu den letzten Theilbewegungen eine immer kleinere Wirkungssphäre gehört, dass sie also nothwendig einen geringern Strom hervorbringen, als wenn sie nicht am Ende lägen. Liegt nun  $z_1$  in der Mitte des Stabes, so treten stets die drei letzten Integrale als additive Grössen auf, sie haben also durchaus keinen Einfluss auf die Gestalt der die Inductionsströme darstellenden Curve. Dies geht nach unserer Bezeichnungsweise bis  $z_{n-1} = l - \zeta_{n-1}$ , d. h. so weit, bis die Rolle von einem solchen dem Ende sehr nahen Punkte abgezogen wird, dass bereits beim ersten Differential der Bewegung genau schon die Strecke des Magnets bis zum Endpunkte wirkt. Von hierab müssen die Resultate bedeutend unrichtig werden.<sup>1)</sup>

Eine genauere mathematische Behandlung des Problems suchte Rothlauf<sup>2)</sup> durchzuführen. Er nimmt den Magnetismus lediglich in der Mantelfläche cylindrischer Magnete an, denkt sich die Inductionsrolle um ein kleines Stück über dem Magnet verschoben und gelangt zu folgendem Integral für den Inductionsstrom:

$$J_s = \iiint \frac{dw \cdot dz \cdot f(z) \cdot ds \cdot ds' (R - r \cos \varphi)}{[(z - w)^2 + R^2 + r^2 + 2Rr \cos \varphi]^{\frac{3}{2}}}.$$

Darin ist  $f(z)$  der Magnetismus im Punkte  $z$ ,  $w$  die Grösse der Verschiebung der Rolle,  $ds'$  das Element des kreisförmigen Querschnittes des Magnets,  $ds$  dasjenige der

1) Vgl. Wiedemann, Galvanismus.

2) Rothlauf, Pogg. Ann. 116. p. 592. 1862.

Rolle,  $r$  der Radius des Querschnittes des Magnets,  $R$  derjenige der Inductionsrolle und  $\varphi$  der Winkel, den der nach  $ds$  gezogene Radius  $R$  mit einer festen Lage bildet. Weil  $f(z)$  unbekannt ist, so nimmt Rothlauf an, dass man eine Interpolationsfunction II. Grades dafür setzen könne. Da die Auflösung des Integrals nicht gelingt, so wird ein Linearmagnet substituirt. Statt nun aber als Integrationsgrenzen für  $z$  die durch das Problem vorgegebenen  $z = \pm l$  zu nehmen, nimmt Rothlauf an, dass nur ein Theil des Magnets bei einer jeden Stellung der Spirale induciren. Da sich nur die obere Grenze dieses Theils näherungsweise, die untere aber durchaus nicht bestimmen lässt, so ist ersichtlich, dass die Constanten des Problems von der Wahl der Grenzen abhängig werden, was natürlich unzulässig ist. Uebrigens ergab sich auf diese Weise, dass die Gleichung:

$$y = B(m^2 - m^{-2})$$

ziemlich genau die Vertheilung des freien Magnetismus angibt, dass aber am Ende sehr viel mehr magnetisches Fluidum zu denken ist, als aus der Annahme des in Rede stehenden Vertheilungsgesetzes folgt. Die Grösse der am Ende vorkommenden Abweichungen zeigt die folgende Tabelle.

Länge des Magnets	Beobacht. Ablenkung	Berechnete Intensität	Biot'sche Curve	Differenz	Mittel d. vorhergeh. Differenz
10 par Z.	27,62	74,76	32,03	-42,73	$\pm 0,26$
10	26,14	71,68	32,61	-39,07	$\pm 0,77$
8	23,53	63,36	31,51	-31,85	$\pm 0,59$
4	17,44	48,66	25,74	-22,92	$\pm 0,52$

Wir sehen, dass keine der mitgetheilten Entwicklungen einwurfsfrei ist. Man kann weder annehmen, dass bei der Bewegung einer Inductionsrolle über einem Magnet nur der jedesmal unter der Rolle befindliche Magnetismus induciren, noch dass man für die Wirkungsweite mehr oder weniger willkürlich andere Grenzen nehmen kann als die durch die Enden des Magnets vorgeschriebenen. Auch

die Vertheilung des Magnetismus in der Axe, wie sie stillschweigend oder ausdrücklich bisher vorausgesetzt wurde, ist nicht ohne Nachweis der Berechtigung anzunehmen.

## II. Entwicklungen für neue Versuche.

Da es sich um die Wirkung von Magneten auf ziemlich dicht anschliessende Inductionsrollen handelt, so kann man den Magnetismus zunächst nur auf der Oberfläche der Magnete, auf der es ja nach Gauss stets eine aequipotentiale Vertheilung gibt, annehmen. Dazu kommt, dass nach den Untersuchungen von v. Feilitsch<sup>1)</sup> bei nicht starken magnetisirenden Kräften der Magnetismus sich meist in den oberflächlichen Schichten befindet. Dies ist insofern wichtig, als mithin eine grosse Uebereinstimmung zwischen der Gauss'schen idealen und der wirklichen Vertheilung anzunehmen ist. Hieraus ist auch ersichtlich, dass die Endflächen der Stäbe bedeutenden Magnetismus haben müssen.

Soll nun untersucht werden, ob nicht für praktische Zwecke mit hinreichender Genauigkeit eine Vertheilung des Magnetismus in der Axe substituirt werden kann, so liegt die Entscheidung nur im Experiment.

Wir haben uns dann zu denken, dass die Vertheilung des Fluidums des Cylindermantels einer ähnlichen in der Axe, und das Fluidum der Endflächen einer Masse in den Endpunkten entspricht.

Es ist nun im Folgenden aus den in zwei Inductionsrollen, die verschiedenen Radius hatten, inducirten Strömen je eine zugehörige Vertheilung in der Axe der Magnete berechnet. Jede dieser Vertheilungen ist derart, dass sie die Wirkung des Magnets für eine bestimmte Entfernung, die dem Radius der betreffenden Rolle gleich ist, erklärt. Für den Fall nun, dass beide Rollen nahezu dasselbe Vertheilungsgesetz angeben, und aus jedem Gesetze sich die Inductionswirkungen auf die nicht zugehörige Rolle er-

1) v. Feilitsch, Pogg. Ann. 80. p. 321. 1850.

geben, ist man allerdings zu dem Schlusse berechtigt, dass für praktische Zwecke die gefundene Vertheilung in der Axe als eine aequipotentiale anzusehen ist. Sind jedoch die gefundenen Vertheilungsgesetze verschieden, so ist evident, dass der Magnetismus nicht in der Axe vertheilt gedacht werden kann.

Es bezeichne  $P$  die Lage des Linienelements  $du$ , in diesem sei  $\mu$  die Dichte des Magnetismus, also  $\mu du$  seine Masse. Durch ihre Bewegung entsteht in einem nahen Drahtkreise ein Strom. Bezogen auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem seien  $\xi, \eta, \zeta$  die Coordinaten von  $P$ ,  $x, y, z$  diejenigen eines Drahtelementes  $ds$  in  $M$ , und es sei  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ . Die Bewegung des Punktes  $P$  in der Richtung der  $XYZ$ -Axe sei resp. gleich  $p, q, t$ , und die Gesamtbewegung  $w = \sqrt{p^2 + q^2 + t^2}$ .

Da hier transversale Kräfte wirken, so entsteht durch die Bewegungscomponente  $dq$  und  $dt$  ein Strom in der  $X$ -Axe, der proportional dem Magnetismus  $\mu \cdot du$  und der Projection des Drahtelementes  $ds$  auf die  $X$ -Axe und umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung  $\varrho$  der Punkte  $M$  und  $P$  ist.

Also ist der Strom in der  $X$ -Axe:

$$dX = \frac{\mu du ds \cos(s/x)}{\varrho^2} \left\{ \frac{y - (\eta - q)}{\varrho} dt - \frac{z - (\zeta - t)}{\varrho} dq \right\}$$

analog:

$$dY = \frac{\mu du ds \cos(s/y)}{\varrho^2} \left\{ \frac{z - (\zeta - t)}{\varrho} dp - \frac{x - (\xi - p)}{\varrho} dt \right\}$$

$$dZ = \frac{\mu \cdot du \cdot ds \cos(s/z)}{\varrho^2} \left\{ \frac{x - (\xi - p)}{\varrho} dq - \frac{y - (\eta - q)}{\varrho} dp \right\}.$$

Wir legen nun das Coordinatensystem der Art, dass die  $Z$ -Axe senkrecht auf dem Drahtkreise steht und durch seine Mitte geht (Taf. II Fig. 3), daher:

$$\angle(s/z) = 90^\circ \quad \cos(s/z) = 0.$$

Ferner setzen wir  $x = 0$ , d. h. wir lassen den Anfangspunkt des Drahtelementes mit der  $Y$ -Axe zusammenfallen, sodass:

$$\angle(s/x) = 0 \quad \angle(s/y) = 90^\circ$$

mithin  $y = R$ , wenn wir mit  $R$  den Radius des Drahtkreises bezeichnen. Es reducirt sich daher die Wirkung der Bewegung von  $P$  auf:

$$dX = \frac{\mu \cdot du \, ds}{\varrho^3} \{ [R - (\eta - q)] \, dt - [z - (\xi - t)] \, dq \},$$

indem  $dY = 0$ ;  $dZ = 0$ .

Wir bestimmen ferner, dass der Punkt  $P$  nur parallel der  $Z$ -Axe verschoben werde, also:

$$p = 0, \quad q = 0, \quad w = t, \quad dq = 0.$$

Somit ist das Differential des inducirten Stromes:

$$(I^*) \quad dX = dJ = \frac{\mu \, du \, ds}{\varrho^3} \{ R - \eta \} \, dt.$$

Fällt der magnetische Punkt in die  $Z$ -Axe, so ist  $\eta = 0$ , also:

$$dJ = \frac{\mu \, du \, R \, ds \, dt}{\varrho^3}.$$

Denken wir uns nun den Magnetismus in der Axe des Magnets vertheilt und lassen dieselbe so mit der  $Z$ -Axe zusammenfallen, dass der Mittelpunkt des Stabes mit dem Coordinatenanfangspunkt übereinstimmt, so ist die Dichte  $\mu$  eine Function von  $z$ , und wir werden diese allgemein darstellen können in der Form:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} M_n z^n$$

Bei regelmässiger Magnetisirung wird in zwei von der Mitte gleich weit entfernten Punkten der Magnetismus an absoluter Grösse gleich, dem Zeichen nach aber entgegengesetzt sein. Also  $f(-z) = -f(z)$ , daher  $M_{2k} = 0$  für  $k = 0, 1, 2, 3 \dots$ , sodass:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} M_{2k+1} z^{2k+1}.$$

Indessen wird in Wirklichkeit eine ganz symmetrische Vertheilung nicht stattfinden, und wir wollen daher im Folgenden die allgemeine Form:

$$f(z) = \sum_n M_n z^n$$

beibehalten.

Befindet sich die Inductionsrolle über dem Punkte  $Z$ , so können wir uns für diesen Punkt das Gesetz der Vertheilung dargestellt denken durch eine nach Potenzen von  $z - Z$  fortschreitende Reihe. Wenn wir  $z - Z = u$  setzen, also  $u$  positiv rechnen in der Richtung der positiven  $Z$ -Axe, so erhalten wir:

$$f(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m u^m,$$

worin der allgemeine Coëfficient  $\mu_m$  abhängt von dem Coëfficienten  $M_n$  und von  $Z$ . Da nun  $z = Z + u$  also:

$$z^n = (Z + u)^n = \sum_{m=0}^n {}^n\mathfrak{B} Z^{n-m} u^m,$$

wenn  ${}^n\mathfrak{B}$  den  $m$ ten Binomialcoëfficienten der  $n$ ten Potenz bedeutet, so erhalten wir aus  $f(z)$  den Coëfficienten  $\mu_m$  einfach, indem wir  $z^n$  durch  $Z$  und  $u$  ausdrücken und darauf den Coëfficienten von  $u^m$  suchen. Letzteren finden wir aber, indem wir  $n$  alle möglichen Werthe geben und dann die Summe der Coëfficienten aus  $u^m$  bilden. Damit aber  $z^n$  überhaupt  $u^m$  enthält, muss  $n \geq m$  sein, daher lautet der Coëfficient von  $u^m$ :

$$\mu_m = \sum_{n \geq m} M_n {}^n\mathfrak{B} Z^{n-m},$$

wobei vielleicht besondere Erwähnung verdient, dass  $\mu_0 = M_0$ .

Kehren wir nunmehr zu dem aufgestellten Ausdruck für den Differentialstrom zurück, so ist zu setzen  $\mu = f(u)$ , und wenn  $d\psi$  der Winkel, den der nach dem Endpunkte von  $ds$  gezogene Radius  $R$  mit der  $X$ -Axe bildet, so ist  $R d\psi = ds$ , daher folgt als Ausdruck für den Gesamtstrom:

$$J_z' = \iiint \frac{f(u) \cdot R^3 \cdot d\psi \cdot du \cdot dt}{\varrho^3},$$

worin  $\varrho^3 = \{(u-t)^2 + R^2\}^{\frac{3}{2}}$ .

Das Integral über  $\psi$  hat die Grenzen 0 und  $2\pi$ . Da  $u$  die Entfernung des inducirenden Magnetismus vom Mittelpunkt der Spirale bedeutet, so hat das hierauf bezügliche Integral  $u_2 = l - Z$  als oberé und  $u_1 = -(l + Z)$  als untere Grenze. Das dritte Integral endlich hat die Grenzen  $Z - t_1$  und  $Z + t_1$ ,

wenn  $2t$  die Grösse der Bewegung der Rolle bedeutet. Allein diese Bewegung beträgt in den unten angeführten Versuchen nur 1 mm, also ändert sich die Entfernung jedes Punktes der Axe nur unbedeutend gegen die mittlere Stellung der Inductionsrolle. Da nun in einem so kleinen Intervalle, wie unten experimentell nachgewiesen wird, der Magnetismus sich nur unmerklich ändert, so können wir statt  $(u-t)$  einfach  $u$  und  $dt=1$  setzen. Dann ist der Inductionsstrom, der durch die magnetische Axe hervorgebracht wird:

$$i_1 = \int_{u=u_1}^{u_2} \int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} \frac{f(u) \cdot R^2 \cdot d\psi du}{(u^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Der vom Magnet inducirte Gesamtstrom wird aber auch von den magnetischen Massen der Endpunkte bedingt. Bezeichnen wir mit  $N_2$  die nordmagnetische, mit  $N_1$  die süd magnetische Masse, so erhalten wir den Beitrag zum Inductionsstrom, indem wir statt des im Linienelement  $du$  concentrirten Magnetismus  $f(u) \cdot du$  einfach  $N_1$  resp.  $N_2$  setzen und die Integration in Bezug auf  $u$  fortfallen lassen, da  $u=u_1$  resp.  $=u_2$  ist. Der Gesamtstrom ist daher:

$$J_z = \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{u=u_1}^{u_2} \frac{f(u) \cdot R^2 d\psi du}{(u^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} + \int_{\psi=0}^{2\pi} \frac{N_1 R^2 d\psi}{(u_1^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} + \int_{\psi=0}^{2\pi} \frac{N_2 R^2 d\psi}{(u_2^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Substituiren wir für  $f(u)$  die oben angegebene Reihe und führen die Integration nach  $\psi$  aus, so folgt:

$$J_z = 2R^2\pi \sum_m \mu_m \int_{u_1}^{u_2} \frac{u^m du}{(u^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2R^2\pi N_1}{(u_1^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2R^2\pi N_2}{(u_2^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzen wir zur Vereinfachung:

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{u^m du}{(u^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = A_m, \text{ so folgt: } A_0 = \left| \frac{u}{R^2 \sqrt{u^2 + R^2}} \right|_{u_1}^{u_2};$$

$$A_{2k} = \left\{ \frac{u^{m-1}}{m-2} + \sum_{h=1}^{h=\infty} (-1)^h \frac{(m-1)(m-3) \dots (m-2h+1) u^{m-2h+1} R^{2h}}{(m-2)(m-4) \dots 2} \right\} \frac{1}{\sqrt{u^2 + R^2}} \Big|_{u_1}^{u_2} \\ + (-1)^{\frac{m-2}{2}} \frac{(m-1)(m-3) \dots 3 R^{m-2}}{(m-2)(m-4) \dots 2} \log \text{nat} (u + \sqrt{u^2 + R^2}) \Big|_{u_1}^{u_2};$$

$$A_{2k+1} = \left| \left\{ \frac{u^{m-1}}{m-2} + \sum_{h=0}^{h=\infty} (-1)^h \frac{(m-1)(m-3) \dots (m-2h+1) u^{m-2h+1} R^{2h}}{(m-2)(m-4) \dots (m-2h-2)} \right\} \frac{1}{\sqrt{u^2 + R^2}} \right|_{u_1}^{u_2}$$

Ferner setzen wir:

$$C_1 = \frac{1}{(u_1^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad C_2 = \frac{1}{(u_2^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Nun ist, wie wir oben bemerkt:

$$\mu_m = \sum_{n \leq m} M_n {}^m \mathfrak{B} Z^{n-m}$$

also:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \mu_m A_m = \sum_{m=1}^{m=\infty} A_m \sum_{n \leq m} M_n {}^m \mathfrak{B} Z^{n-m} = \sum_{n=0}^{n=\infty} M_n \sum_{0 \leq m \leq n} {}^m \mathfrak{B} A_m Z^{n-m}.$$

Wir können nun symbolisch:

$$\sum_{0 \leq m \leq n} {}^m \mathfrak{B} A_m Z^{n-m} = \{[A + Z]^n\}$$

setzen, wenn nach Auflösung des Binomiums statt  $A^k$  wieder  $A_k$  eingeführt wird. Dann ist:

$$\sum_m \mu_m A_m = \sum_{n=0}^{n=\infty} M_n \{[A + Z]^n\}$$

und:

$$(II^*) J_z = 2 R^2 \pi \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} M_n \{[A + Z]^n\} + 2 R^2 \pi C_1 N_1 + 2 R^2 \pi C_2 N_2.$$

In dieser Gleichung haben wir die  $(n+2)$  Unbekannten  $M_n, N_1, N_2$ , die aus einer gegebenen grösseren Anzahl Beobachtungen  $J_z$  mittelst der Methode der kleinsten Quadrate berechnet werden können.

Hat man aus zwei mit verschiedenen Rollen gemachten Beobachtungsreihen zwei Systeme der Constanten  $M_n$  und  $N_1$  und  $N_2$  berechnet, so ist das aus der einen Reihe sich ergebende System im allgemeinen nicht unmittelbar zu vergleichen mit dem andern, weil die zu Grunde gelegten Einheiten nicht dieselben sind.

Man kann jedoch die in Rede stehenden Grössen auf



die absolute magnetische Maasseinheit reduciren, wenn das magnetische Moment des untersuchten Stabes in dieser Einheit gegeben ist.

Es sei  $g$  der Quotient aus der absoluten und der unbekannten Einheit, in welcher die vorgegebenen Grössen ausgedrückt sind, so sind  $gM_n$ ,  $gN_1$  und  $gN_2$  die Constanten der die Vertheilung angegebenden Function in absolutem Maass; wir bezeichnen sie der Reihe nach mit  $\mathfrak{M}_n$ ,  $\mathfrak{N}_1$  und  $\mathfrak{N}_2$ . Zur Bestimmung von  $g$  hat man die Gleichung:

$$\begin{aligned} \text{Magn. Moment} &= g \left\{ \int_{-1}^{+1} z \cdot f(z) \cdot dz - lN_1 + lN_2 \right\} \\ &= 2g \sum_n M_n \frac{z_n^{n+2}}{n+2} + gl(-N_1 + N_2). \end{aligned}$$

Zum Zwecke einer weitem Controle, ob die vorliegenden zwei Systeme der Constanten  $\mathfrak{M}'_n$ ,  $\mathfrak{N}'_1$ ,  $\mathfrak{N}'_2$  und  $\mathfrak{M}''_n$ ,  $\mathfrak{N}''_1$ ,  $\mathfrak{N}''_2$ , die wir hier durch Indices unterschieden haben, wesentlich dasselbe Vertheilungsgesetz angeben, kann man aus beiden die Distanz der Massenmittelpunkte der magnetischen Massen berechnen.

Ist diese gesuchte Distanz  $= 2\lambda$ , so ist:

$$\begin{aligned} 2\lambda \left\{ \int_0^1 f(z) dz + \mathfrak{N}_2 \right\} &= 2\lambda \left\{ \int_{-1}^0 f(z) dz + \mathfrak{N}_1 \right\} \\ &= \int_{-1}^{+1} z \cdot f(z) dz + l\mathfrak{N}_2 - l\mathfrak{N}_1. \end{aligned}$$

Auch die kürzlich von Hrn. E. Riecke<sup>1)</sup> eingeführten äquivalenten Pole können zur Controle benutzt werden.

Setzen wir deren Distanz  $= 2A$ , so ist:

$$\begin{aligned} 2A^2 \left\{ \int_0^1 z f(z) dz + z\mathfrak{N}_2 \right\} &= 2A^2 \left\{ \int_{-1}^0 z f(z) dz + z\mathfrak{N}_1 \right\} \\ &= \int_{-1}^{+1} z^3 f(z) dz + z^3 [\mathfrak{N}_2 - \mathfrak{N}_1]. \end{aligned}$$

1) E. Riecke, Wied. Ann. 8. p. 299. 1879.

### III. Anordnung der Versuche.

An einem etwa 1 m langen verticalen Hebelarme (*ab*), (Taf. II Fig. 4) der sich zwischen den Mikrometerschrauben  $c_1$  und  $c_2$  bewegen konnte, und nicht angezogen der Spitze  $c_2$  anlag, wurde die Inductionsrolle *s* befestigt. Die Verschiebung derselben, wenn ein Faden *d* den Hebelarm gegen die Schraubenspitze  $c_1$  zog, wurde mittelst des Kathetometers *k* beobachtet und so durch die Schrauben  $c_1$  und  $c_2$  regulirt, dass sie genau 1 mm betrug. Diese Art und Weise der Anordnung war so stabil, dass während mehrerer Beobachtungssätze die Grösse der Verschiebung sich höchstens um 0,01 bis 0,03 mm veränderte. Mittelst des Stativs *e* wurde der Magnet *m* in die Inductionsrolle gebracht, genau centrirt und senkrecht zu ihr gerichtet. Die Stellung seiner Enden gegen die Mitte der Verschiebung der mittlern Windung der Rolle wurde mit Hülfe des Kathetometers regulirt. Hierdurch konnte die Rolle genau über die gewünschte Stelle des Magnets gebracht werden.

Die Ebene der Inductionsrolle bewegte sich parallel der Declinationsrichtung, und der Magnet stand senkrecht zur Inclinationsrichtung. Bei dieser Aufstellung konnte also der Erdmagnetismus keinerlei Einfluss auf die Beobachtungen haben.

Jede der beiden angewandten Inductionsrollen wurde aus 0,5 mm dickem, mit Seide doppelt umsponnenem Kupferdraht hergestellt und war 3 Windungen breit und 3 Windungen hoch, sodass ihr Querschnitt ein Quadrat bildete. Die Radien der mittelsten Windung waren bei

der engern Rolle I  $R = 13,26$  mm,

der weitem Rolle II  $R = 20,53$  mm.

Bei jedem Versuch waren stets beide Rollen in den Stromkreis eingeschaltet, sodass der Widerstand in beiden Beobachtungsreihen derselbe war. Das benutzte Galvanometer ist wesentlich dem Wiedemann'schen ähnlich. Der magnetische Stahlring aber, in dem sich der Spiegel befindet, hat eine im Verhältniss zu der ihn umgebenden

Indu  
Emp

net  
durch  
mete  
Gau  
der  
den,  
geleg  
meid  
dopp  
Scala  
vom

Indu  
eine  
änd  
näm  
war  
bis  
An

Ma  
300  
glei  
beit  
60°

Ver  
han

ein  
ein  
W

Inductionsrolle ziemlich bedeutende Masse, wodurch die Empfindlichkeit des Instrumentes sehr beeinträchtigt wird.

Die Bewegung der über dem zu untersuchenden Magnet befindlichen Inductionsrolle geschah momentan. Die durch die inducirten Ströme hervorgebrachten Galvanometerausschläge waren äusserst gering, es wurde daher die Gauss'sche Multiplicationsmethode angewandt. Die Anzahl der Umkehrpunkte, nach der die Ausschläge constant wurden, war verschieden. Auch konnte hierauf kein Gewicht gelegt werden, weil mannichfache Störungen nicht zu vermeiden waren. Die unten angeführten Zahlen sind die doppelten Elongationen in Scalentheilen. Der Werth eines Scalentheils beträgt 32,5 Sec., die Entfernung der Scala vom Spiegel war nämlich gleich 3175 Scalentheilen.

#### IV. Die Versuche und deren Resultate.

Bei der Aufstellung der Fundamentalgleichung für den Inductionsstrom setzten wir voraus, dass auf der Strecke eines Millimeters sich der Magnetismus nur unmerklich ändere. Versuche an allen Stellen von Stäben ergaben nämlich, dass der Inductionsstrom vollständig proportional war der Grösse der Verschiebung der Rolle von 0,5 mm bis 2,0 mm über demselben Punkte, wodurch die gemachte Annahme gerechtfertigt wird.

Die Untersuchungen wurden an einem cylindrischen Magnet, dessen Durchmesser 11,3 mm, dessen Länge 300,56 mm, gemacht. Zunächst wurde derselbe, um Ungleichmässigkeiten in der Härte, die ja durch das Bearbeiten der Endflächen entstehen, zu vermeiden, bis etwa 60° erwärmt und dann abgekühlt.

In diesem Härtezustande ist er den ersten beiden Versuchsreihen unterworfen. Für die letzte wurde er glashart gemacht.

Um die Verhältnisse möglichst zu vereinfachen, wurde eine galvanische Spirale zur Magnetisirung angewandt. In einem Abstände  $b$  von der Mitte der Spirale ist nach W. Weber<sup>1)</sup> die electromagnetische Scheidungskraft:

1) Weber, Abhandl. d. k. sächs. Ges. d. Wissensch., 1852.

$$X = \frac{2\pi ni}{d} \left\{ 1 - \frac{2d^2 - b^2}{2(d^2 - b^2)} \left( \frac{r}{d} \right)^2 b^2 + \dots \right\},$$

worin  $n$  die Anzahl der Windungen der Spirale,  $i$  die Intensität des Stromes,  $2d = 2\sqrt{a^2 + r^2}$  die Diagonale der Spirale und  $r$  ihren Radius bezeichnet. Im vorliegenden Falle war die Länge der Spirale  $2a = 600$  mm,  $r = 90$  mm, und da der Stab 300,56 mm lang war und behufs Magnetisirung mitten in die Spirale gehängt wurde, so ergibt sich, dass die magnetisirende Kraft am Ende um den 0,013 ten Theil von derjenigen in der Mitte verschieden war. Man kann daher die magnetisirende Kraft als für alle Punkte des Magnets gleich ansehen. Die in der letzten Versuchsreihe sich dennoch vorfindenden Abweichungen von der Symmetrie sind mithin durch die Verschiedenheit der Härte der einzelnen Stellen des Magnets bedingt.

Zur Beurtheilung des angewandten Verfahrens wollen wir die Rechnungen der I. Reihe ausführlich mittheilen.

Für alle hier angeführten Versuchsreihen reicht hin, wenn man setzt:

$$f(z) = M_1 z + M_3 z^3$$

und  $-N_1 = N_2 = N$ , also:

$$J_z = 2R^2\pi (M_1 \{[A + Z]^1\} + M_3 \{[A + Z]^3\} + N \{C_2 - C_1\}).$$

Um bequemere Zahlen zu bekommen, dividire man diese Gleichung mit  $\frac{1000}{2R^2\pi}$ .

Bezeichnet man die daraus entstehenden Coëfficienten mit einem (\*), so erhält man Gleichungen von der Form:

$$J_z^* = \{[A + Z]^1\} M_1^* + \{[A + Z]^3\} M_3^* + N^* \{C_2 - C_1\}.$$

Eine Auflösung der Gleichungen:

$$n_k = a_k x_1 + b_k x_2 + c_k x_3 + \dots \text{ und } k = 1, 2, 3 \dots$$

nach der Methode der kleinsten Quadrate hat Gauss gegeben in dem Aufsätze: Disquisitio de elementis ellipt. Palladis. Zur Bezeichnung der in der Rechnung auftretenden Normalgleichungen sind die dort gewählten Symbole beibehalten.

Wie oben werden wir auch hier die Constanten  $M_n^*$  und  $N^*$ , die zu der engern Spirale (I) gehören, durch ('), die zu der weitem (II) gehören, durch (") bezeichnen.

Man findet für die

engere Inductionsrolle (I)

	$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$
$z_1$	+0,000 068	-0,016 584	+ 3,0053	-296,20
$z_2$	0,005 709	-0,072 150	1,0394	-280,47
$z_3$	0,009 611	-0,051 754	42,7020	-261,53
$z_4$	0,010 751	-0,031 895	71,9502	-242,30
$z_5$	0,011 235	-0,015 460	125,42	-197,06
$z_6$	0,011 330	-0,008 781	167,38	-149,10
$z_7$	0,011 367	-0,005 008	197,20	-100,47
$z_8$	0,011 381	-0,002 361	216,21	- 51,64

weitere Inductionsrolle (II)

$z_1$	+0,000 176	-0,015 740	+ 2,9465	-290,47
$z_2$	0,002 373	-0,045 452	1,5048	-266,80
$z_3$	0,003 591	-0,038 261	21,9160	-248,83
$z_4$	0,004 196	-0,027 399	32,6261	-232,69
$z_5$	0,004 558	-0,014 616	53,5063	-191,74
$z_6$	0,004 650	-0,008 521	70,9431	-145,98
$z_7$	0,004 684	-0,005 123	83,1405	- 98,54
$z_8$	0,004 697	-0,002 321	91,2361	- 49,79

Gleichungen für die engere Inductionsrolle (I)

$$\begin{aligned}
 z_1 &= 200,01 & 0,1819 &= -0,0029 M_1^{*'} + 60,6 M_3^{*'} + 0,000 007 N^{*'} \\
 z_2 &= 150,29 & 17,0250 &= + 0,7859 M_1^{*'} + 14 680,0 M_3^{*'} + 0,000 428 N^{*'} \\
 z_3 &= 137,86 & 19,8200 &= + 1,2738 M_1^{*'} + 39 668,8 M_3^{*'} + 0,000 168 N^{*'} \\
 z_4 &= 125,43 & 17,0620 &= + 1,3165 M_1^{*'} + 46 540,0 M_3^{*'} + 0,000 045 N^{*'} \\
 z_5 &= 100,57 & 13,3510 &= + 1,1918 M_1^{*'} + 53 667,3 M_3^{*'} + 0,000 007 N^{*'} \\
 z_6 &= 75,71 & 9,6634 &= + 0,8490 M_1^{*'} + 42 633,7 M_3^{*'} + 0 \\
 z_7 &= 50,83 & 6,1755 &= + 0,5728 M_1^{*'} + 30 081,0 M_3^{*'} + 0 \\
 z_8 &= 25,97 & 2,8194 &= + 0,2842 M_1^{*'} + 16 987,1 M_3^{*'} + 0
 \end{aligned}$$

Daraus:

$$\begin{aligned}
 [nn] &= + 1291,50 \\
 [an] &= - 89,541 \\
 [bn] &= - 319 2401 \\
 [cn] &= - 0,011 478 \\
 [aa] &= + 6,5235 \\
 [ab] &= + 245 551 \\
 [ac] &= + 0,000 617 93 \\
 [bb] &= + 984 633 0000 \\
 [bc] &= + 15,4177 \\
 [cc] &= + 0,000 000 213 53
 \end{aligned}$$

hieraus wieder:

$$\begin{aligned}
 [nn, 1] &= + 62,47 \\
 [bn, 1] &= + 177 999 \\
 [cn, 1] &= - 0,002 9963 \\
 [bc, 1] &= - 7,842 \\
 [bb, 1] &= + 603 530 000 \\
 [cc, 1] &= + 0,000 000 1550
 \end{aligned}$$

dann:

$$\begin{aligned}
 [nn, 2] &= + 9,977 \\
 [cn, 2] &= - 0,000 6836 \\
 [cc, 2] &= + 0,000 000 0531
 \end{aligned}$$

V. Aus dieser Rechnung folgt, dass die Summe der Fehlerquadrate

$$[nn, 3] = + 1,18.$$

Zur Berechnung der Unbekannten dienen die Gleichungen:

$$0 = - 0,000\,683\,6 + 0,000\,000\,053\,1\,N''$$

$$0 = + 177\,999 + 603\,530\,000\,M_3'' - 7,842\,N''$$

$$0 = - 89,541 + 6,5235\,M_1'' + 245\,551\,M_3''$$

$$+ 0,000\,617\,93\,N''$$

daraus:

$$\left\{ \begin{array}{l} N'' = + 12874 \\ M_3'' = - 0,000\,127\,65 \\ M_1'' = + 17,312 \end{array} \right. \quad \text{also:} \quad \left\{ \begin{array}{l} N'' = + 14154 \\ M_3'' = - 0,000\,140\,35 \\ M_1'' = + 19,0395 \end{array} \right.$$

Gleichungen für die weitere Inductionsrolle (II)

$$z_1 = 200,01 \quad 0,19937 = 0,01938\,M_1'' + 993,9\,M_3'' + 0,000\,006\,N''$$

$$z_2 = 150,29 \quad 5,31170 = 0,31114\,M_1'' + 5\,377,2\,M_3'' + 0,000\,116\,N''$$

$$z_3 = 137,86 \quad 6,69500 = 0,45460\,M_1'' + 16\,057,3\,M_3'' + 0,000\,073\,N''$$

$$z_4 = 125,43 \quad 6,26080 = 0,49884\,M_1'' + 19\,030,3\,M_3'' + 0,000\,030\,N''$$

$$z_5 = 100,57 \quad 5,13580 = 0,47532\,M_1'' + 22\,219,5\,M_3'' + 0,000\,006\,N''$$

$$z_6 = 75,71 \quad 3,88220 = 0,34355\,M_1'' + 17\,838,5\,M_3'' + 0$$

$$z_7 = 50,83 \quad 2,51110 = 0,23297\,M_1'' + 13\,154,8\,M_3'' + 0$$

$$z_8 = 25,97 \quad 1,21210 = 0,12176\,M_1'' + 7\,136,1\,M_3'' + 0$$

Daraus:

hieraus wieder:

$$[nn] = + 161,4981$$

$$[nn, 1] = + 4,05$$

$$[an] = - 12,3308$$

$$[bn, 1] = + 18907$$

$$[bn] = - 480\,453,0$$

$$[cn, 1] = - 0,000\,2100$$

$$[cn] = - 0,001\,320\,86$$

$$[bb, 1] = + 101\,991\,000$$

$$[aa] = + 0,9657$$

$$[bc, 1] = - 1,0202$$

$$[ab] = + 39107,9$$

$$[cc, 1] = + 0,000\,000\,0016$$

$$[ac] = + 0,000\,087$$

dann:

$$[bb] = + 168\,572\,1000$$

$$[nn, 2] = + 0,545$$

$$[bc] = + 2,50302$$

$$[cn, 2] = - 0,000\,0208$$

$$[cc] = + 0,000\,000\,019\,57$$

$$[cc, 2] = + 0,000\,000\,0016$$

Aus dieser Rechnung folgt, dass die Summe der Fehlerquadrate

$$[nn, 3] = + 0,2746.$$

Zur Berechnung der Unbekannten dienen die Gleichungen:

$$0 = - 0,000\,0208 + 0,000\,000\,0016\,N^{**}$$

$$0 = + 18907 + 101\,991\,000\,M_3^{**} - 1,0202\,N^{**}$$

$$0 = - 12,3308 + 0,9657\,M_1^{**} + 39107,9\,M_3^{**} \\ + 0,000\,087\,N^{**}$$

daraus:

$$N^{**} = + 13000$$

$$M_3^{**} = - 0,000\,055\,344$$

$$M_1^{**} = + 13,827,$$

also:

$$N'' = + 34427$$

$$M_3'' = - 0,000\,146\,57$$

$$M_1'' = + 36,618.$$

Aus den mitgetheilten Summen der Fehlerquadrate geht hervor, dass in der That die berechneten Constanten vollkommen die aus den Beobachtungen entnommenen Grössen  $J_z'$  erklären.

In den folgenden Tabellen gibt die erste Spalte die Punkte der  $Z$ -Axe an, über denen die in der zweiten Spalte aufgenommenen Beobachtungen gemacht sind. In der Regel sind drei Beobachtungsreihen für jeden Punkt angestellt, die mitgetheilten Zahlen sind die constanten doppelten Endelongationen in Scalentheilen. In der dritten Spalte finden sich die doppelten Endelongationen, wie sie sich aus den auf Grund der Beobachtungen berechneten Constanten ergeben, welche über den Tabellen stehen; in der vierten Spalte die zur zweiten und dritten gehörenden Differenzen; in der fünften die aus den Beobachtungen mit der andern Inductionsrolle berechneten doppelten Endelongationen, die hier auf diejenige Einheit zuvor reducirt sind, in der die in der zweiten Spalte gemachten Beobachtungen angegeben sind; die Differenzen mit den in der zweiten Spalte stehenden Beobachtungen füllen die sechste Spalte.

$87^{\circ}632 = ,N^2$   $18391 + = ,N^6$   $1690000'0 - = ,N^3$   $627'21 + = ,N^2$   
 $89^{\circ}902 = ,N^2$   $91162 + = ,N^4$   $1882000'0 - = ,N^3$   $819^{\circ}98 + = ,N^1$   
 allons au point I et au point A

Erste Reihe.  
 Länge des Magnets = 300,58 mm, magn. Moment = 421 236 00.  
 Der Magnet bis zur Sättigung magnetisirt und nicht glashart.

Engere Inductionsreihe.

$M_1 = + 19,039$   $M_2 = - 0,00014035$   $N' = + 14154$   $2\lambda' = 203,69$   
 $W_1 = + 18,636$   $W_2 = - 0,00013788$   $W' = + 13854$   $2\lambda' = 235,94$

Nord- ende	Galvanometer- ausschläge Rolle I		Differenz	Rolle II		Differenz	Süd- ende	Galvanometer- ausschläge Rolle I		Differenz	Rolle II		Differenz
	beobacht.	berechn.		beobacht.	berechn.			beobacht.	berechn.		beobacht.	berechn.	
200,01	0,20 0,35 0,14 0,16	0,16	+0,04 +0,19 -0,02 $\pm 0,00$	0,17	+0,03 +0,18 -0,03 -0,01	-	200,01	0,35 0,24 -0,12	-0,16	-0,19 -0,08 +0,04	-	0,17	-0,18 -0,07 +0,05
150,29	18,80 18,50 18,96	18,95	-0,15 -0,45 +0,01	20,05	-1,25 -1,55 -1,09	-	150,29	-18,43 -18,80 -18,80	-18,95	+0,52 +0,15 +1,25	-	20,05	+1,62 +1,25 +1,25
137,86	22,44 21,83 21,78	21,06	+1,38 +0,77 +0,72	22,66	-0,22 -0,83 -0,88	-	137,86	-21,80 -21,90 -21,00	-21,06	-0,74 -0,84 +0,06	-	22,66	+0,86 +0,76 +1,66
125,43	18,85 18,77 17,85	19,16	-0,31 -0,39 -1,31	20,87	-2,02 -2,10 -3,02	-	125,43	-19,68 -18,65 -18,80	-19,16	-0,52 +0,51 +0,36	-	20,87	+1,19 +2,22 +2,07
100,57	14,87 14,40 14,42	15,25	-0,38 -0,85 -0,83	17,51	-2,64 -3,11 -3,09	-	100,57	-14,70 -14,92 -14,80	-15,25	+0,55 +0,33 +0,45	-	17,51	+2,81 +2,59 +2,71
75,71	10,14 10,77 10,60	10,18	-0,04 +0,59 +0,42	12,07	-1,93 -1,30 -1,47	-	75,71	-10,90 -10,50 -10,58	-10,18	-0,72 -0,32 -0,40	-	12,07	+1,17 +1,57 +1,49
50,83	6,80 6,63 6,80	6,73	+0,07 -0,10 +0,07	8,05	-1,25 -1,42 -1,25	-	50,83	6,91 6,82 6,79	6,73	-0,18 -0,09 -0,06	-	8,05	+1,14 +1,23 +1,26
25,97	3,20 3,00 —	2,98	+0,22 +0,02 —	3,85	-0,65 -0,85 —	-	25,97	3,10 3,10 3,15	2,98	-0,12 -0,12 -0,17	-	3,85	+0,75 +0,75 +0,70



Weitere Induktionsrolle.

$M'' = + 36,618$   $M_3'' = - 0,000\ 2887$   $N'' = + 29116$   $2\lambda'' = 206,68$   
 $2\lambda_1'' = + 17,423$   $2\lambda_3'' = - 0,000\ 0697$   $9'' = + 16381$   $2\lambda'' = 239,48$

Nord- ende	Galvanometer- ausschläge Rolle II beobacht. berechn.	* Differenz	Rolle I berechn.	Differenz	Stüd- ende	Galvanometer- ausschläge Rolle II beobacht. berechn.	Differenz	Rolle I berechn.	Differenz
200,01	0,67 0,44 0,50	-0,11 -0,34 -0,28	0,66	+0,01 -0,22 -0,16	-200,01	-0,65 -0,50 -0,43	-0,78	-0,66	+0,13 +0,28 +0,35
150,29	13,60 13,97 13,80	-0,98 -0,61 -0,78	13,99	-0,39 -0,02 -0,19	-150,29	-14,36 -14,58 -14,11	-14,58	-14,00	+0,22 $\pm 0,00$ +0,47
137,86	17,00 17,66 17,88	+0,20 +0,86 +1,08	15,28	+1,72 +2,38 +2,60	-137,86	-17,70 -18,00 -	-16,80	-15,28	-0,90 -1,20 -
125,43	16,60 16,70 16,71	+0,09 +0,19 +0,20	14,91	+1,69 +1,79 +1,80	-125,43	-16,45 -16,54 -16,55	-16,51	-14,91	+0,06 -0,03 -0,04
100,57	13,66 13,05 13,23	-0,68 -1,29 -1,11	12,98	+1,28 +0,67 +0,85	-100,57	-13,10 -14,46 -12,95	-14,34	-12,38	+1,24 -0,12 +1,39
75,71	10,28 9,90 10,21	+0,31 -0,07 +0,24	8,30	+1,98 +1,60 +1,91	-75,71	-9,90 -10,50 -10,51	-9,97	-8,30	+0,07 -0,53 -0,54
50,83	6,30 6,30 6,70	-0,30 -0,30 +0,10	5,52	+0,78 +0,78 +1,18	-50,83	-6,89 -6,87 -	-6,60	-5,52	-0,29 -0,27 -
25,97	3,06 3,40	-0,35 -0,01	2,71	+0,35 +0,69	-25,97	-3,40 -3,00	-3,41	-2,71	+0,01 +0,41
									+0,01 +0,16 +0,23 -0,36 -0,58 -0,11 -2,42 -2,72 - -1,54 -1,63 -1,64 -0,72 -2,08 -0,57 -1,60 -2,20 -2,21 -1,37 -1,35 - -0,69 -0,29

allonsuoinpni eretia M  
9100 617— „M

Zweite Reihe.

Magn. Moment = 204 931 00. Härte wie vorhin, Magnetismus noch weit unter dem Sättigungspunkte.

Engere Inductionsrolle.

$$M'_1 = 9,4483 \quad M'_2 = -0,000\,058\,0 \quad N' = 5394,4 \quad 2\lambda' = 202,73$$

$$M'_1 = 9,1233 \quad M'_2 = -0,000\,056\,0 \quad N' = 5221,2 \quad 2\lambda' = 234,94$$

Nord- ende	Galvanometer- ausschläge Rolle I beobacht.	berechn.	Differenz	Rolle II berechn.	Differenz	Süd- ende	Galvanometer- ausschläge Rolle I beobacht.	berechn.	Differenz	Rolle II berechn.	Differenz
150,29	8,96 9,00 8,70 9,00	8,88	+0,08 +0,12 -0,18 +0,12	8,26	+0,70 +0,74 +0,44 +0,74	150,29	-9,04 -9,02 -8,80 —	-8,88	-0,16 -0,14 +0,08 —	-8,26	-0,78 -0,76 -0,54 —
125,43	10,27 10,46 10,43	9,98	+0,29 +0,48 +0,45	8,11	+2,16 +2,35 +2,32	125,43	-9,33 -9,02 -9,08	-9,98	+0,65 +0,96 +0,90	-8,11	-1,22 -0,91 -0,97
100,57	8,06 8,18 8,01	8,18	-0,12 ±0,00 -0,17	7,22	+0,84 +0,96 +0,79	100,57	-8,17 -8,21 -7,84	-8,18	+0,01 -0,03 -0,34	-7,22	-0,95 -0,99 -0,62
75,71	5,92 5,59 6,09	5,55	+0,37 +0,04 +0,54	5,17	+0,75 +0,42 +0,92	75,71	-5,92 -5,59 -6,09	-5,55	-0,37 -0,04 -0,54	-5,17	-0,77 -0,42 -0,92
50,83	3,72 3,80 3,80	3,66	+0,06 +0,14 +0,14	3,51	+0,21 +0,29 +0,29	50,83	-3,78 -4,00 -4,12	-3,66	-0,12 -0,34 -0,46	-3,51	-0,27 -0,49 -0,61
25,97	1,20 2,01 1,60	1,70	-0,50 +0,31 -0,10	1,77	-0,57 +0,34 -0,17	25,97	-2,00 -1,54 —	-1,70	-0,30 +0,16 —	-1,77	-0,23 +0,23 —

Weitere Inductionsrolle.

$$M_1'' = +12,0016 \quad M_3'' = +0,000\,0365 \quad N'' = +2058,2 \quad 2\lambda' = 216,04$$

$$\mathfrak{M}_1'' = +7,1363 \quad \mathfrak{M}_3'' = +0,000\,0217 \quad \mathfrak{N}'' = +1223,9 \quad 2\lambda'' = 247,72$$

Nord- ende	Galvanometer- ausschläge Rolle II beobacht.   berechn.	Differenz	Rolle I berechn.	Galvanometer- ausschläge Rolle II beobacht.   berechn.	Differenz	Rolle I berechn.	Differenz
150,29	6,36 6,61 6,05	+0,05 +0,30 -0,26	8,44	-6,20 -6,30 -6,30	-2,08 -1,83 -1,39	-8,44	+0,11 -0,01 -0,01
125,43	7,05 7,57 7,52	-0,25 +0,27 +0,22	8,63	-7,86 -7,45 -7,31	-1,58 -1,06 -1,11	-8,63	-0,56 -0,15 -0,01
100,57	6,12 6,10 6,03	-0,52 -0,54 -0,61	7,41	-6,03 -6,30 -5,85	-1,29 -1,31 -1,38	-7,41	+0,61 +0,34 +0,79
75,71	5,01 5,10 5,31	+0,23 +0,32 +0,53	4,50	-4,93 -5,34 -5,07	+0,51 +0,51 +0,81	-4,45	-0,15 -0,56 -0,29
50,83	3,47 3,20 3,21 4,04	+0,19 -0,08 -0,07 +0,76	3,29	-3,36 -3,35 -3,44 -	+0,18 -0,09 -0,08 -0,75	-3,29	-0,08 -0,07 -0,16 -
25,97	1,70 1,75	-0,02 +0,03	1,69	-1,90 -1,77	+0,01 +0,06	-1,69	-0,18 -0,05
							+2,24 +2,14 +2,14 +0,77 +1,18 +1,32 +1,38 +1,11 +1,56 -0,48 -0,89 -0,62 -0,07 -0,06 -0,15 - -0,21 -0,08

die V  
= M  
Endp  
ducti  
dig d  
ducti  
ander  
graph  
den v  
dem  
nur a  
trirt  
  
des  
Linie  
und  
und  
C ge  
wie  
mit A  
entst  
steht  
such  
eine  
Die  
selbs  
netis  
tung  
keit  
Rec  
  
tion  
dass  
falle  
in  
hin

Dritte Reihe.

Magn. Moment = 501 356 00. Stahlstab glashart, bis zur Sättigung magnetisirt.

Engere Inductionsrolle.

$$M_1 = + 21,886 \quad M_2 = - 0,000 2032 \quad N' = 11208 \quad 2\lambda' = 204,91$$

$$M_1' = + 23,513 \quad M_2' = - 0,000 2183 \quad N' = 22939 \quad 2\lambda' = 237,10$$

Nordende	Galvanometerauschläge Rolle I		Differenz	Südende	Galvanometerauschläge Rolle I		Differenz
	beobachtet	berechnet			beobachtet	berechnet	
$z = 200,01$	0,25 0,30 0,11	0,15	+0,10 +0,15 -0,04	-200,01	- 0,22 - 0,23 - 0,21	- 0,15	-0,07 -0,08 -0,06
150,29	22,00 21,68 21,60	20,91	+1,09 +0,77 +0,69	-150,29	-19,60 -19,30 -19,90	-20,91	+1,31 +1,61 +1,01
125,43	22,81 21,00 22,80	21,84	+0,97 -0,84 +0,96	-125,43	-21,34 -21,47 -21,29	-21,84	+0,50 +0,37 +0,55
100,57	16,94 16,93 16,90	15,26	+1,68 +1,67 +1,64	-100,57	-16,65 -16,81 -16,90	-15,26	-1,39 -1,55 -1,64
75,71	11,57 11,27 11,29	10,90	+0,67 +0,37 +0,39	-75,71	-12,27 -12,91 —	-10,90	-1,37 -2,01 —
50,83	6,33 6,35 6,40	7,06	-0,73 -0,71 -0,66	-50,83	- 6,33 - 6,35 - 6,38	- 7,06	+0,73 +0,71 +0,68
25,97	1,83 1,82	2,77	-0,94 -0,95	-25,97	- 2,80 - 2,65	- 2,77	-0,03 +0,12

Aus den vorstehenden Tabellen ist zu ersehen, dass die Vertheilung des Magnetismus durch eine Curve  $f(z) = M_1 z + M_3 z^3$  und durch magnetische Massen in den Endpunkten hinreichend dargestellt wird, indem die Inductionswirkungen für die betreffende Rolle sich vollständig daraus erklären. Dagegen genügt das aus einer Inductionsrolle gefundene Gesetz nicht vollständig für die andere. Der Verlauf der Rechnung, wie die beigegebenen graphischen Darstellungen, zu denen wir uns gleich wenden werden, zeigen, dass dieser Umstand fast allein von dem Magnetismus der Endflächen herrührt, indem derselbe nur auf Kosten der Genauigkeit in einem Punkte concentrirt gedacht werden kann.

Die beigegebene Fig. 5 (Taf. II) stellt die Vertheilung des Magnetismus in der Axe durch die unterbrochenen Linien dar. Die Curven  $B_2$  und  $B_1$  gehören zur I. Reihe und zwar  $B_2$  zu Rolle I,  $B_1$  zu Rolle II. Die Curven  $A_1$  und  $A_2$  gehören zu Reihe II, Rolle I resp. II; die Curve  $C$  gehört zur III. Reihe. Diese Curven weichen in der I. wie II. Reihe wenig voneinander ab. Sie wenden aber alle, mit Ausnahme derjenigen, die der weitem Rolle der II. Reihe entstammt, die concave Seite der Z-Axe zu. Diese Gestalt steht in directem Widerspruche mit allen bisherigen Untersuchungen, die, wie oben bemerkt, die Biot'sche Curve, welche eine der Sinuslinie entgegengesetzt gekrümmte ist, ergaben. Die Genauigkeit, mit der aber die hier gefundenen Curven selbst mit Einschluss des fehlerhaften Einflusses der magnetischen Massen der Endpunkte die gemachten Beobachtungen darstellen, lässt kaum einen Zweifel an der Richtigkeit des vorliegenden Resultates zu, während alle früheren Rechnungen eine solche Controle nicht möglich machen.

Bezüglich der Curve, die sich aus der weitem Inductionsrolle der II. Reihe ergibt, ist nicht zu übersehen, dass sie und die zugehörige der engern Rolle sich auffallend einer Geraden anschliessen, und dass eine solche in der That zur Wiedergabe der Beobachtungen auch hinreicht.

### V. Gleichungen zur Berechnung der Vertheilung des Magnetismus auf der Oberfläche cylindrischer Magnete.

Zum Zwecke genauerer Resultate ist es nach dem Mitgetheilten nothwendig, den Magnetismus auf der Oberfläche der Magnete anzunehmen.

P. 423 ist entwickelt worden, dass der Strom, welcher durch Verschiebung des magnetischen Linienelementes  $du$  in  $P$  parallel der  $Z$ -Axe um den Weg  $t$  gegen das Linienelement  $ds$  in diesem hervorgerufen wird, ist:

$$(I^*) \quad dX = dJ = \frac{\mu \cdot du \, ds}{q^3} \{R - \eta\} dt.$$

Hierin war  $ds$  das Linienelement eines Drahtkreises, der senkrecht zur  $Z$ -Axe lag.

Statt des Linienelementes in  $P$  führen wir ein Flächenelement ein. Bezeichnet wieder  $du$  die Ausdehnung parallel der  $Z$ -Axe,  $ds'$  diejenige in der Richtung senkrecht zur kürzesten Verbindungslinie von  $du$  und der Axe,  $\mu$  die Dichte des Magnetismus auf diesem Flächenelemente, so ist der durch die vorausgesetzte Bewegung von  $du \cdot ds'$  inducirte Strom:

$$dJ = \frac{\mu \cdot du \cdot ds' \cdot ds}{q^3} \{R - \eta\} dt.$$

Es gehöre das Flächenelement  $du \, ds'$  einem Ringe an, der senkrecht zur  $Z$ -Axe liegt, dessen Mittelpunkt mit demselben zusammenfällt, und dessen Radius  $r_1$  sei. Ist dann:

$$\begin{aligned} \sphericalangle \psi &= \sphericalangle (Y | R), & \text{also} & \quad ds = R \, d\psi \\ \sphericalangle \varphi &= \sphericalangle (Y | r_1), & & \quad ds' = r_1 \, d\varphi \\ & & \eta &= r_1 \cos \varphi, \end{aligned}$$

so folgt:

$$dJ = \frac{\mu \, du \, (R - r_1 \cos \varphi)}{q^3} R \, d\psi \cdot r_1 \, d\varphi \cdot dt$$

als Wirkung des magnetischen Ringelementes auf das Drahtelement.

Um die Wirkung des ganzen Ringes zu bekommen, müsste nach  $\psi$  integrirt werden. Hat man dies gethan, so kann man für das folgende Drahtelement  $ds$  dasselbe

Integral aufstellen u. s. f., indem man jedesmal die  $X$ -Axe durch  $ds$  gehen lässt. Dies Verfahren, die Wirkung des Ringes auf den Drahtkreis zu finden, ist aber gleichbedeutend mit einer Integration in Bezug auf  $\varphi$ . Diese Art der Betrachtung hat den Vortheil, dass der Nenner  $\rho^3$  unabhängig von  $\psi$  wird.

Statt eines Ringes von der Breite  $du$  haben wir nun einen Cylinder von der Länge  $2l =$  der Länge des Magnets. Lassen wir die Mitte des Magnets mit dem Coordinatenanfangspunkte zusammenfallen, so ist, wie früher, die Dichte  $\mu$  eine Function von  $z$ , die bei vollständig regelmässiger Magnetisirung nur ungerade Potenzen von  $z$  enthalten würde. Setzen wir wie oben  $u = z - Z$ , also  $du = dz$ , so ist:

$$f(z - Z) = f(u) = \mu_0 u^0 + \mu_1 u^1 + \mu_2 u^2 + \dots,$$

und auch hier ist es möglich,  $\mu_k$  als Function von  $Z$  und den in  $f(z)$  auftretenden Coëfficienten  $M_h$  zu bestimmen. Wir werden uns aber auf nur wenige Glieder der Reihe für  $f(z)$  beschränken müssen, denn wir werden sehen, dass die numerischen Rechnungen bereits so sehr bedeutend werden, auch kann man leicht nach den folgenden Entwicklungen noch mehr Glieder berücksichtigen, falls dies nöthig werden sollte.

Wir setzen also  $f(z) = \sum_{n=0}^{n=3} M_n z^n$ , mithin auch:

$$f(u) = \sum_{m=0}^{m=3} \mu_m u^m.$$

Vernachlässigt man dann aus denselben Gründen wie auf p. 425 die Verschiebung der Rolle gegen die magnetischen Punkte, indem man dieselbe überall gleich gross macht, so erhält man als Inductionsstrom, der von dem Magnetismus des Cylindermantels hervorgebracht wird:

$$\int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{u=u_1}^{u_2} \frac{f(u) (R - r_1 \cos \varphi) R d\psi \cdot r_1 d\varphi \cdot du}{(u^2 + R^2 + r_1^2 - 2Rr_1 \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

worin

$$u_1 = -(l + Z) \quad u_2 = l - Z.$$

Um den gesammten Inductionsstrom zu erhalten, sind noch die Inductionsströme, die von den Endflächen herühren, hinzuzufügen.

Es war die Inductionswirkung des Linienelementes  $du$  mit der Dichte  $\mu$  gegeben durch die Gleichung:

$$dJ = \frac{\mu du ds (R - r \cos \varphi)}{q^3} dt,$$

wenn  $\angle \varphi = \angle(r | Y)$  und  $r$  die Entfernung von  $\mu du$  von der Axe angibt. Statt des Linienelements führen wir ein Flächenelement ein. Dies liegt in einer zu der  $Z$ -Axe senkrechten Ebene. Setzen wir Polarcoordinaten hier voraus, deren Anfangspunkt in den Schnittpunkt der Endfläche mit der Axe fällt, und rechnen den Winkel  $\varphi$  von der  $Y$ -Axe aus, so ist die Grösse eines Flächenelementes in der Entfernung  $r$  von der Axe  $r dr d\varphi$  und, wenn  $\mu$  die Dichte des Magnetismus ist,  $\mu r dr d\varphi$  die magnetische Masse. Setzen wir diesen Ausdruck statt der Masse des Linienelementes  $\mu du$  ein, so ist der Inductionsstrom gegeben durch:

$$di = \frac{\mu \cdot r dr d\varphi (R - r \cos \varphi)}{q^3} dt.$$

Auch hier vernachlässigen wir die Integration nach  $t$ . Zunächst ist nun allgemein die Dichte  $\mu$  eine Function der Entfernung  $r$  vom Mittelpunkte der Fläche, um welchen Punkt herum vollständige symmetrische Vertheilung des Magnetismus stattfinden wird. Bei nicht zu grossen Endflächen kann man jedoch die Dichte des Magnetismus als constant annehmen. Man kann allgemein setzen:

$$\mu = F(r) = N_0 + N_2 r^2.$$

Allein da die Berücksichtigung des quadratischen Gliedes unverhältnissmässig grosse Rechnungen veranlasst, so wird man, wenn irgend möglich,  $N_2 = 0$  setzen, was auch hier geschehen mag. Bezeichnen wir mit  $r_1$  den Radius des Cylinders und mit  $v$  die Entfernung der Endfläche von der Inductionsrolle, so ist der von einer solchen magnetischen Fläche inducirte Strom:



$$i = \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_1} \frac{F(r) (R - r \cos \varphi) r dr R d\psi}{\{\psi^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi\}^{\frac{3}{2}}} \cdot d\varphi.$$

Da sich nun in unserem Falle eine der Endflächen in der Entfernung  $v = u_1$ , die andere in der Entfernung  $v = u_2$  von der Inductionsrolle befindet, so erhalten wir, wenn die Functionen, welche die Vertheilung in den Endflächen angeben, mit den zugehörigen Indices versehen werden, als Gesamtinductionsstrom:

$$(II) \quad J_z = \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{u=u_1}^{u_2} \frac{f(u) (R - r_1 \cos \varphi) R d\psi r_1 d\varphi \cdot du}{\{u^2 + R^2 + r_1^2 - 2Rr_1 \cos \varphi\}^{\frac{3}{2}}} \\ + \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_1} \frac{F_1(r) (R - r \cos \varphi) r dr d\varphi R d\psi}{\{u_1^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi\}^{\frac{3}{2}}} \\ + \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_1} \frac{F_2(r) (R - r \cos \varphi) r dr d\varphi R d\psi}{\{u_2^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Darin gehört also  $F_1(r)$  der Südfläche,  $F_2(r)$  der Nordfläche an.

Setzen wir  $R - r_1 \cos \varphi = p$  und  $R^2 + r_1^2 - 2Rr_1 \cos \varphi = P$ , so folgt:

$$\int_{\psi} \int_{\varphi} \int_u \frac{f(u) \cdot p \cdot R d\psi r_1 d\varphi \cdot du}{(u^2 + P)^{\frac{3}{2}}} \\ = 2Rr_1 \pi \left\{ \mu_0 u \left[ R \int \frac{d\varphi}{P(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} - r_1 \int \frac{\cos \varphi d\varphi}{P(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} \right] \right. \\ \left. - \mu_1 \left[ R \int \frac{d\varphi}{(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} - r_1 \int \frac{\cos \varphi d\varphi}{(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} \right] \right. \\ \left. - \mu_2 \left[ u R \int \frac{d\varphi}{(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} - u r_1 \int \frac{\cos \varphi d\varphi}{(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} + R \int \log \text{nat} (u + \sqrt{u^2 + P}) d\varphi \right. \right. \\ \left. \left. - r_1 \int \cos \varphi \log \text{nat} (u + \sqrt{u^2 + P}) d\varphi \right] \right\}$$

$$+ \mu_3 \left[ u^2 R \int \frac{d\varphi}{(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} - u^2 r \int \frac{\cos \varphi d\varphi}{(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} + 2R(R^2 + r_1^2) \int \frac{d\varphi}{(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} \right. \\ \left. - 2r_1(r_1^2 - R^2) \int \frac{\cos \varphi d\varphi}{(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} + 4Rr_1^2 \int \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} \right].$$

Da sämtliche Integrale die Grenzen 0 und  $2\pi$  haben, so sind diese fortgelassen.

Lösen wir die Bezeichnungen  $p$  und  $P$  auf und setzen jetzt zur Vereinfachung:

$$d = R^2 + r_1^2, \quad D = u^2 + R^2 + r_1^2,$$

so folgt nach einigen Rechnungen durch die Substitution:

$$(\alpha) \quad \varphi = \pi - \chi, \quad \cos \chi = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \chi \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \chi = \pi - \psi$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{P(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} = \frac{8}{(R + r_1)^2 \sqrt{u^2 + (R + r_1)^2}} \Pi \left( \frac{\pi}{2}, n, c_u \right),$$

$$\text{wenn:} \quad n = \frac{-2Rr_1}{(R + r_1)^2}, \quad c_u = \frac{4Rr_1}{u^2 + (R + r_1)^2}.$$

Ebenso nach  $(\alpha)$ :

$$\int \frac{\cos \varphi d\varphi}{P(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-2}{(R + r_1)^2 \sqrt{u^2 + (R + r_1)^2}} \left\{ \int \frac{d\psi}{(1 + n \sin^2 \psi) \sqrt{1 - c_u^2 \sin^2 \psi}} \right. \\ \left. - \int \frac{2 \sin^2 \psi d\psi}{(1 + n \sin^2 \psi) \sqrt{1 - c_u^2 \sin^2 \psi}} \right\};$$

da nun:

$$\int \frac{2 \sin^2 \psi d\psi}{(1 + n \sin^2 \psi) \sqrt{1 - c_u^2 \sin^2 \psi}} = \frac{2}{n} \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - c_u^2 \sin^2 \psi}} \\ - \frac{2}{n} \int \frac{d\psi}{(1 + n \sin^2 \psi) \sqrt{1 - c_u^2 \sin^2 \psi}},$$

so folgt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{P(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-8}{(R + r_1)^2 \sqrt{u^2 + (R + r_1)^2}} \left\{ \frac{n+2}{n} \Pi \left( \frac{\pi}{2}, n, c_u \right) - \frac{2}{n} F \left( \frac{\pi}{2}, c_u \right) \right\}.$$

Ferner:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} = \frac{8}{\sqrt{u^2 + (R + r_1)^2}} F \left( \frac{\pi}{2}, c_u \right).$$

Ferner nach (α):

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(u^2 + P)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-8}{c_u^2 \sqrt{u^2 + (R+r_1)^2}} \left\{ (1-c_u^2) F\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) + E\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) \right\}.$$

Ferner nach (α):

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{(u^2 + P)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{2}{\sqrt{u^2 + (R+r_1)^2}} \int \frac{d\psi}{\sqrt{1-c_u^2 \sin^2 \psi}} \\ &- \frac{8}{\sqrt{u^2 + (R+r_1)^2}} \int \frac{\sin^2 \psi d\psi}{\sqrt{1-c_u^2 \sin^2 \psi}} + \frac{8}{\sqrt{u^2 + (R+r_1)^2}} \int \frac{\sin^4 \psi d\psi}{\sqrt{1-c_u^2 \sin^2 \psi}}. \end{aligned}$$

Zur Reduction des letzten dieser Integrale benutzen wir die von Legendre<sup>1)</sup> entwickelte Gleichung:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi} \cos \varphi \sin^{2k-3} \varphi &= (2k-3) Z^{2k-4} \\ &- (1+c^2) (2k-2) Z^{2k-3} + c^2 (2k-1) Z^{2k}, \end{aligned}$$

worin: 
$$Z^{2k} = \int \frac{\sin^{2k} \varphi d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi}},$$

daher für  $k=2$ :

$$3c_u^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^4 \psi d\psi}{\sqrt{1-c_u^2 \sin^2 \psi}} = \sqrt{1-c_u^2 \sin^2 \psi} - Z^0 + (1+c_u^2) 2Z^2,$$

durch Einsetzung folgt dann:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{u^2 + P}} &= \frac{24c_u^4 - 64c_u^2 + 64}{3c_u^4 \sqrt{u^2 + (R+r_1)^2}} F\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) \\ &+ \frac{64 - 32c_u^2}{3c_u^4 \sqrt{u^2 + (R+r_1)^2}} E\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right). \end{aligned}$$

Die folgenden Integrale lassen sich nur näherungsweise berechnen, wir schreiben der Einfachheit wegen:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \log \operatorname{nat} (u + \sqrt{u^2 + P}) d\varphi &= L_1(u, 2\pi), \\ \int_0^{2\pi} \cos \varphi \log \operatorname{nat} (u + \sqrt{u^2 + P}) d\varphi &= L_2(u, 2\pi). \end{aligned}$$

1) Legendre, Fonct. elliptiques, Chap. IV.

Das zweite und dritte Integral der Gleichung (II) hatte die Form:

$$\int_0^{2\pi} \int_{\varphi} \int_r \frac{F(r) (R - r \cos \varphi) r dr d\varphi R d\psi}{(v^2 + R^2 + r^2 - 2R \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

dies ist für  $F(r) = \pm N_0$ , indem wir die Dichte des Magnetismus auf der Nordfläche positiv, die auf der Südfläche negativ nehmen:

$$\begin{aligned} &= \pm 2R\pi N_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \frac{-R}{\sqrt{D-2Rr_1 \cos \varphi}} + \frac{R^3 \cos^2 \varphi}{(R^2 \cos^2 \varphi - V) \sqrt{D-2Rr_1 \cos \varphi}} \right. \\ &\quad - \frac{R^2 r_1 \cos \varphi}{(R^2 \cos^2 \varphi - V) \sqrt{D-2Rr_1 \cos \varphi}} + \frac{R}{V\sqrt{V}} - \frac{R^3 \cos^2 \varphi}{(R^2 \cos^2 \varphi - V) \sqrt{V}} \\ &\quad - \frac{-VR \cos^2 \varphi + 2R^2 r_1 \cos^3 \varphi - Vr_1 \cos \varphi}{(V - R^2 \cos^2 \varphi) \sqrt{D-2Rr_1 \cos \varphi}} \\ &\quad - \frac{R\sqrt{V} \cos^2 \varphi}{(V - R^2 \cos^2 \varphi)} + \cos \varphi \log \text{nat} (\sqrt{V} - 2R \cos \varphi) \\ &\quad \left. - \cos \varphi \log \text{nat} (r_1 - 2R \cos \varphi + \sqrt{D-2Rr_1 \cos \varphi}) \right\}, \\ &\text{wenn } V = v^2 + R^2; \quad D = r_1^2 + V. \end{aligned}$$

Darin ist nun:

$$\int_0^{2\pi} \frac{-R d\varphi}{\sqrt{D-2Rr_1 \cos \varphi}} = \frac{-8R}{Vv^2 + (R+r_1)^2} F\left(\frac{\pi}{2}, c_v\right),$$

worin wie oben:

$$c_v^2 = \frac{4Rr_1}{v^2 + (R+r_1)^2}.$$

Ferner durch Zerlegung in Partialbrüche und nach der Substitution ( $\alpha$ ):

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{(V - R^2 \cos^2 \varphi) \sqrt{D-2Rr_1 \cos \varphi}} = \frac{-4}{R^2} F\left(\frac{\pi}{2}, c_v\right) \\ &\quad - \frac{2\sqrt{V} H\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, c_v\right)}{R(\sqrt{V}+R) \sqrt{v^2 + (R+r_1)^2}} + \frac{2\sqrt{V} H\left(\frac{\pi}{2}, \nu, c_v\right)}{R(\sqrt{V}-R) \sqrt{v^2 + (R+r_1)^2}}, \end{aligned}$$

$$\text{worin:} \quad \nu = \frac{2R}{\sqrt{V}-R}, \quad \lambda = \frac{-2R}{\sqrt{V}+R}.$$

Ebenso:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(V-R^2 \cos^2 \varphi) \sqrt{D-2Rr_1 \cos \varphi}} \\
 &= \frac{-2\Pi\left(\frac{\pi}{2}, r, c_v\right)}{R(\sqrt{V}+R)\sqrt{u^2+(R+r_1)^2}} + \frac{2\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, c_v\right)}{R(\sqrt{V}-R)\sqrt{u^2+(R+r_1)^2}}.
 \end{aligned}$$

Und:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \frac{\cos^3 \varphi d\varphi}{(V-R^2 \cos^2 \varphi) \sqrt{D-2Rr_1 \cos \varphi}} \\
 &= \frac{-8}{R^2 c_u^2 \sqrt{u^2+(R+r_1)^2}} \left\{ (1-c_u^2) F\left(\frac{\pi}{2}, c_v\right) + E\left(\frac{\pi}{2}, c_v\right) \right\} \\
 &+ \frac{2V}{R\sqrt{u^2+(R+r_1)^2}} \left\{ -\frac{\Pi\left(\frac{\pi}{2}, r, c_v\right)}{\sqrt{V}-R} + \frac{\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, c_v\right)}{\sqrt{V}+R} \right\}.
 \end{aligned}$$

Ferner:

$$\text{Ferner: } \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{V-R^2 \cos^2 \varphi} = -\frac{2\pi}{R}.$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi \log \text{nat} (V\sqrt{V}-2R \cos \varphi) d\varphi = -\frac{2R\sqrt{V}}{4R^2} 2\pi.$$

Das folgende Integral muss näherungsweise berechnet werden, wir setzen zur Vereinfachung:

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi \log \text{nat} (r_1-2R \cos \varphi + \sqrt{D-2R \cos \varphi}) d\varphi = L_3(v_1 2\pi).$$

Setzen wir nun zur Abkürzung:

$$A_0 = \int_{u_1}^{u_2} \frac{8u}{n(R+r_1)^2 \sqrt{u^2+(R+r_1)^2}} \left\{ [u(R+r_1)+2r] \Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, c_u\right) - 2r_1 F\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) \right\} du.$$

$$A_1 = - \int_{u_1}^{u_2} \frac{8}{c_u^2 \sqrt{u^2+(R+r_1)^2}} \left\{ [c_u^2 R + r_1 (1-c_u^2)] F\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) + r_1 E\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) \right\} du.$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= - \int_{u_1}^{u_2} \frac{8u}{c_u^2 \sqrt{u^2 + (R+r_1)^2}} \left\{ [c_u^2 R + r_1 (1 - c_u^2)] F\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) \right. \\
&\quad \left. + r_1 E\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) \right\} + R L_1(u, 2\pi) - r_1 L_3(u, 2\pi) \Big| \\
A_3 &= + \int_{u_1}^{u_2} \frac{8}{3c_u^4 \sqrt{u^2 + (R+r_1)^2}} \left\{ [3c_u^4 R(D+R^2) \right. \\
&\quad + 3c_u^2 r_1 (u^2 + 2r_1^2 - 2R^2)(1 - c_u^2) + Rr_1^2 (12c_u^4 - 32c_u^2 + 32)] \\
&\quad \times F\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) + [3r_1 c_u^2 (u^2 + 2r_1^2 - 2R^2) + 16R(2 - c_u^2)] E\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) \Big| \\
C &= \int_{u_1}^{u_2} 4 \left\{ \frac{4r_1 - 2c_u^2(R-2r_1)}{c_u^2 \sqrt{u^2 + (R+r_1)^2}} - \frac{V-R^2}{R} \right\} F\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) \\
&\quad + \frac{16r_1}{c_u^2 \sqrt{u^2 + (R+r_1)^2}} E\left(\frac{\pi}{2}, c_u\right) \\
&\quad + \frac{16R^2 r_1 + 2R\sqrt{V}(V-R^2) - 2r_1(\sqrt{V}-R)^2}{R(\sqrt{V}+R)\sqrt{u^2 + (R+r_1)^2}} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, r, c_u\right) \\
&\quad + \frac{-16R^2 r_1 + 2R\sqrt{V}(V-R^2) + 2r_1(\sqrt{V}+R)^2}{R(\sqrt{V}+R)\sqrt{u^2 + (R+r_1)^2}} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda, c_u\right) \\
&\quad - L_3(u, 2\pi) + \frac{2R\pi}{V} + \frac{V-R^2}{VR} 2\pi - \frac{\pi\sqrt{V}}{R} \Big|
\end{aligned}$$

darin:

$$\begin{aligned}
c_u &= \frac{4Rr_1}{u^2 + (R+r_1)^2}, \quad V = u^2 + R^2, \quad n = \frac{-2Rr_1}{(R+r_1)^2}, \\
v &= \frac{2R}{(R+r_1)^2}, \quad \lambda = \frac{-2R}{\sqrt{V}+R}.
\end{aligned}$$

Dann ist der Gesamtinductionsstrom:

$$\begin{aligned}
J_z &= 2Rr_1\pi \left\{ \mu_0 A_0 + \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 + \mu_3 A_3 \right\} + 2R\pi N_0 C \\
&= 2Rr_1\pi \sum_{n=0}^{m=3} \mu_n A_n + 2R\pi N_0 C.
\end{aligned}$$

Nach p. 424 ist nun:

$$\mu_n = \sum_{n \leq m} M_n^m \mathfrak{B}^n Z^{n-m}$$

also auch nach p. 426:

$$\sum_m \mu_m A_m = \sum_{n=0}^{n=3} M_n \{[A+Z]^n\}.$$

Mithin:

$$J_s = 2 R r_1 \pi \sum_{n=0}^{n=3} M_n \{[A+Z]^n\} + 2 R \pi N_0 C.$$

Um obige Entwicklungen für das numerische Rechnen brauchbar zu machen, reduciren wir die elliptischen Integrale III. Gattung auf solche I. und II. Gattung.

Zu diesem Zwecke sind die Parameter näher zu untersuchen.

Da  $R > r_1$  ist, hat man:

$$0 > n > -1, \quad +\infty > v > 0, \quad 0 > \lambda > -1.$$

Bedeutet daher  $\vartheta$  einen Winkel, so kann man stets setzen:

$$v = \cotg^2 \vartheta.$$

Ferner ist für:

$$0 \geq u \geq R + r_1, \quad 1 \geq -n \geq c_u^2,$$

wenn also  $b_u$  der zu  $c_u$  complementäre Modul ist, und  $\theta$  einen Winkel bezeichnet, so kann man setzen:

$$n = -1 + b_u^2 \sin^2 \theta.$$

Für  $R + r_1 \geq u$  ist  $c_u^2 \geq -u \geq \pm 0$ , wir können daher setzen:

$$n = -c_u^2 \sin^2 \theta.$$

Einen ähnlichen Einfluss hat der Werth von  $u$  auf die Darstellung von  $\lambda$ .

Die Bedingung, dass für einen Werth  $u_*$  das Quadrat des Moduls gleich dem absoluten Werth des Parameters gleich sei, ist:

$$u_* = \sqrt{3r_1^2 - R^2} \pm r \sqrt{10r_1^2 - 4R^2}.$$

Ist also  $R > \frac{1}{2} r_1 \sqrt{10}$ ,

so ist stets  $c_u^2 > \lambda \geq -1$ .

In diesem Falle kann man setzen:

$$\lambda = -c_u^2 \sin^2 \tau.$$

Wenn aber:  $R \leq \frac{1}{2} r_1 \sqrt{10}$ ,

so ergibt sich ein reeller Werth für  $u_*$ , und je nachdem nun:

1)  $0 \leq u \leq u_*$  ist, hat man  $-c_u^2 > \lambda > -1$ , also  $\lambda = -1 + b_u^2 \sin^2 \tau$  oder für:

2)  $u_* \leq u$  hat man  $0 > \lambda > -c_u^2$ , also  $\lambda = -c_u^2 \sin^2 \tau$ .

Legendre<sup>1)</sup> hat bereits die drei hier vorkommenden und zugleich allein möglichen Fälle, die aus dem Verhältniss der Werthe des Parameters und des Moduls entspringen, behandelt. Sie bedingen drei verschiedene Reductionen der elliptischen Integrale III. Gattung. Wir müssen uns darauf beschränken, die für den vorliegenden Fall gültigen Formeln anzuführen.

Bezeichnen wir mit  $\sigma$  den Parameter, mit  $c$  den Modul, mit  $b$  dessen Complement, mit  $\chi$  einen Winkel und setzen nach Legendre zur Abkürzung:

$$A(b, \chi) = \sqrt{1 - b^2 \sin^2 \chi},$$

so ist:

1) für  $\sigma = \cotg^2 \chi$

$$\frac{A(b, \chi)}{\sin \chi \cos \chi} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \sigma, c\right) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{tg} \chi A(b, \chi) F\left(\frac{\pi}{2}, c\right) \\ + F\left(\frac{\pi}{2}, c\right) F(b, \chi) - F\left(\frac{\pi}{2}, c\right) E(b, \chi) - E\left(\frac{\pi}{2}, c\right) F(b, \chi).$$

2) für  $\sigma = -1 + b^2 \sin^2 \chi$

$$\frac{b^2 \sin \chi \cos \chi}{A(b, \chi)} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \sigma, c\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{b^2 \sin \chi \cos \chi}{A(b, \chi)} F\left(\frac{\pi}{2}, c\right) \\ + F\left(\frac{\pi}{2}, c\right) F(b, \chi) - E\left(\frac{\pi}{2}, c\right) F(b, \chi) - F\left(\frac{\pi}{2}, c\right) E(b, \chi).$$

3) für  $\sigma = -c^2 \sin^2 \chi$

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \sigma, c\right) = F\left(\frac{\pi}{2}, c\right) + \frac{\operatorname{tg} \chi}{A(b, \chi)} \left\{ F\left(\frac{\pi}{2}, c\right) E(c, \chi) - E\left(\frac{\pi}{2}, c\right) F(c, \chi) \right\}.$$

Je nach dem Werthe von  $u$ , d. h. nach der Stellung der Inductionsspirale über dem Magnet, hat man in der Gleichung für  $J_z$  auf die Integrale III. Gattung eine dieser Formeln anzuwenden. Es kommen dann nur noch Inte-

1) Legendre, Fonct. ellipt. Chap. XV u. XXIII.



grale I. und II. Gattung vor. Für sie hat Legendre<sup>1)</sup> Tafeln berechnet. Man bemerke, dass man durch passende Wahl von  $u$  und  $R$  bewirken kann, dass die Argumente der die Parameter vertretenden trigonometrischen Functionen ganze Grade sind, wodurch lästige Interpolationen vermieden werden. Eben darum sind auch die Legendre'schen Grössen eingeführt, denn für jeden einzelnen Punkt des Magnets so viele elliptische Integrale erst zu berechnen, würde auch den Uermüdlichsten abschrecken. Die Ausrechnung der Grössen  $L$  bleibt immerhin sehr zeitraubend.

Eine Berechnung der oben mitgetheilten Versuche nach dieser Methode ist nicht gemacht, weil wegen oben angeführter Umstände die Beobachtungen die Grenze der Genauigkeit nicht erreichen. Auch erscheint es nothwendig, dass die Inductionsrollen so nahe als möglich den Magnet umgeben, eine Bedingung, die in obigen Versuchen nicht erfüllt ist.

Jedenfalls ist rathsam, zu einer derartigen Untersuchung 2 Inductionsrollen von verschiedenem Radius der Controle wegen anzuwenden.

Vorliegende Arbeit entstand auf gütige Anregung des Hrn. Prof. Schering. Die mitgetheilten Versuche wurden im physikalischen Laboratorium zu Göttingen ausgeführt, dessen Benutzung Hr. Prof. Riecke mir freundlichst gestattete. Beiden Herren bin ich daher zu grösstem Dank verpflichtet.

---

1) Legendre, Fonct. ellipt. T. 2.

**V. Allgemeine Theorie der Dämpfung,  
welche ein Multiplicator auf einen Magnet  
ausübt; von Karl Schering<sup>1)</sup>,**

Privatdocent an der Universität Göttingen.

§. 2. Integration der allgemeinen Differentialgleichung.

Nachdem in dem Vorhergehenden eine vollständige Bestimmung der Dämpfungsfuction eines Galvanometers durchgeführt ist, erscheint es als eine mit dem theoretischen Interesse das praktische Bedürfniss vereinende Aufgabe, die Bewegung eines Körpers unter der Wirkung einer variablen Dämpfung allgemeiner zu untersuchen. Im Folgenden ist diese Aufgabe durch eine angenäherte Integration der Differentialgleichung der Bewegung gelöst

Ein Körper sei um eine feste Axe drehbar und bewege sich in einem Mittel, das seiner Bewegung einen der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand entgegensetzt, und es wirke auf ihn in einer zur Drehungsaxe senkrechten Richtung eine von der Zeit unabhängige Kraft. Ist dann  $\varphi$  der Winkel, welchen zur Zeit  $t$  eine von dem Angriffspunkte dieser constanten Kraft senkrecht auf die Drehungsaxe gefällte Gerade mit der Richtung der Kraft einschliesst, so ist die Differentialgleichung der Bewegung:

$$(1) \quad K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + P(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} + Q(\varphi) = 0,$$

wenn  $K$  das Trägheitsmoment des Körpers bedeutet.

Die Form dieser Gleichung hat auch die Bewegungsgleichung eines an einem verticalen Faden in der Luft oder in einem geschlossenen Multiplicator schwebenden Magnets. Im letztern Falle ist nach dem Obigen  $P(\varphi)$  nicht constant, sondern eine gerade Function von  $\varphi$ ; wir wollen setzen:

$$P(\varphi) = 2 Km (1 - m_1 \varphi^2),$$

indem wir  $\varphi^4$  vernachlässigen. Dabei ist also vorausgesetzt,

1) Fortsetzung von p. 302.

dass für  $\varphi = 0$ ,  $P(\varphi)$  seinen Maximalwerth erhält, d. h. dass eine der parallelen Ebenen der Windungen des Multiplifiers die magnetische Axe des Magnets in sich aufnimmt. Eine solche Einstellung kann nach dem Vorhergehenden mit Sicherheit erreicht werden. Ferner ist  $Q(\varphi)$  gleich der Summe der von der Torsionskraft des Fadens und dem Erdmagnetismus ausgeübten Drehungsmomente, also eine ungerade Function von  $\varphi$ , und daher, abgesehen von fünften Potenzen von  $\varphi$ :

$$Q(\varphi) = Kn^2 \varphi (1 - n_1 \varphi^2),$$

vorausgesetzt, dass der magnetische Meridian mit der Richtung der Ruhelage der Torsion des Fadens oder Drahtes übereinstimmt; andernfalls würde noch eine Constante hinzutreten. Aus Gleichung (1) wird daher:

$$(2) \quad \frac{dd\varphi}{dt^2} + 2m(1 - m_1 \varphi^2) \frac{d\varphi}{dt} + n^2 \varphi (1 - n_1 \varphi^2) = 0.$$

Die physikalische Bedeutung der vier Constanten:

$$m, m_1, n, n_1$$

kann in folgender Weise definirt werden. Es bezeichne wieder  $V$  die Potentialfunction der Wechselwirkung zwischen dem Magnet und einem im Multiplier kreisenden galvanischen Strome von der Intensität Eins, so definiren wir, wie oben (p. 294), die Dämpfungsfuction durch die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 = 2KWM(1 - M_1 \varphi^2).$$

Ist dann:

$M$  das magnetische Moment des Magnets,

$T$  die Horizontalintensität,

$f$  der Torsionscoefficient des Drahtes,

$\alpha$  der Dämpfungscoefficient der Luft,

$\lambda_0, \tau_0$  das log. Decrement resp. die Schwingungsdauer bei geöffneter Kette, so bestehen bekanntlich die Gleichungen:

$$m = \frac{\alpha}{2K} + M = \frac{\lambda_0}{\tau_0} + M; \quad n^2 = \frac{MT + f}{K} = \frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\tau_0^2},$$

ausserdem ist:

$$m_1 m = M_1 M,$$

$$n_1 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{f}{MT}},$$

$m_1$  und  $n_1$  sind absolute Zahlen;  $\frac{1}{m}$ ,  $\frac{1}{n}$ , sind der gewählten Zeiteinheit proportional.

Die Gleichung (2) in die Form gesetzt:

$$\frac{dd\varphi}{dt^2} + 2m \frac{d\varphi}{dt} + n^2 \varphi = 2m m_1 \varphi^3 \frac{d\varphi}{dt} + n^2 n_1 \varphi^3$$

enthält auf der rechten Seite nur Grössen von der Ordnung  $\varphi^3$ . Bei Voraussetzung nicht zu grosser Werthe von  $\varphi$  bietet nun die auf unsere obige Gleichung angewandte Methode der Variation der Constanten ein geeignetes Mittel zur Integration. Wir setzen:

$$(3) \quad \varphi = A e^{-mt} \sin(\beta t + B); \quad \beta^2 = n^2 - m^2.$$

Diese Gleichung stellt bekanntlich, wenn  $A$  und  $B$  Constanten sind, das allgemeine Integral von:

$$(4) \quad \frac{dd\varphi}{dt^2} + 2m \frac{d\varphi}{dt} + n^2 \varphi = 0$$

in reeller Form dar, unter der Voraussetzung, die wir auch hier und im Folgenden überall machen, dass  $n^2 > m^2$  ist. Jetzt sollen  $A$  und  $B$  als Functionen von  $t$  so bestimmt werden, dass (3) das allgemeine Integral von (2) darstellt. Die Differentiation von (3) ergibt:

$$(5) \quad \frac{d\varphi}{dt} = A e^{-mt} \{-m \sin(\beta t + B) + \beta \cos(\beta t + B)\},$$

wenn wir die noch willkürlichen Functionen  $A$  und  $B$  der Bedingungsgleichung:

$$(6) \quad 0 = \sin(\beta t + B) \frac{dA}{dt} + A \cos(\beta t + B) \frac{dB}{dt}$$

unterwerfen. Durch nochmalige Differentiation von (5) und durch Addition der entstehenden Gleichung zu (5) und (3) erhalten wir mit Berücksichtigung von (6) die zweite Bedingungsgleichung für  $A$  und  $B$ :

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2m m_1 \varphi^2 \frac{d\varphi}{dt} + n^2 n_1 \varphi^3 \\ & = \beta e^{-mt} \left\{ \cos(\beta t + B) \frac{dA}{dt} - A \sin(\beta t + B) \frac{dB}{dt} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Die Integration von (2) ist demnach auf diejenige von (6) und (7) zurückgeführt. Für die Correctionsgrößen auf der linken Seite von (7) setzen wir jetzt ihre *angenäherten* Werthe ein, berechnet aus:

$$\varphi_0 = \frac{v_0}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t,$$

d. i. aus dem Integrale von (4) unter den Voraussetzungen, die wir auch für das Integral von (2) später einführen wollen, dass für  $t = 0$  auch  $\varphi = 0$  ist und  $\frac{d\varphi}{dt} = v_0$ .

Dann wird aus (7):

$$(7a) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^3 e^{-3\alpha t} \{ (n^2 n_1 - 2m^2 m_1) \sin \beta t^3 + 2m m_1 \beta \cdot \sin \beta t^2 \cos \beta t \} \\ & = \beta e^{-\alpha t} \left( \cos(\beta t + B) \frac{dA}{dt} - A \sin(\beta t + B) \frac{dB}{dt} \right). \end{aligned} \right.$$

Setzen wir:

$$(8) \quad u = A \sin B, \quad w = A \cos B,$$

woraus folgt:

$$\frac{du}{dt} = A \cos B \frac{dB}{dt} + \sin B \frac{dA}{dt},$$

$$\frac{dw}{dt} = -A \sin B \frac{dB}{dt} + \cos B \frac{dA}{dt},$$

so wird aus den Gleichungen (6) und (7a):

$$0 = \sin \beta t \frac{dw}{dt} + \cos \beta t \frac{du}{dt},$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^3 \frac{e^{-3\alpha t}}{\beta} \{ (n^2 n_1 - 2m^2 m_1) \sin \beta t^3 + 2m m_1 \beta \sin \beta t^2 \cos \beta t \} \\ & = -\sin \beta t \frac{dw}{dt} + \cos \beta t \frac{du}{dt}; \end{aligned}$$

und durch Auflösung nach  $\frac{dw}{dt}$  und  $\frac{du}{dt}$ :

$$(9) \quad \beta \frac{du}{dt} = \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^3 e^{-2\alpha t} \{ p_1 \sin \beta t^4 + p_2 \sin \beta t^3 \cos \beta t + p_3 \sin \beta t^2 \cos \beta t^2 \},$$

$$(10) \quad \beta \frac{dw}{dt} = \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^3 e^{-2\alpha t} \{ q_1 \sin \beta t^4 + q_2 \sin \beta t^3 \cos \beta t + q_3 \sin \beta t^2 \cos \beta t^2 \},$$

worin die Constanten  $p, q$  durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} p_1 &= 2m^2 m_1 - n^2 n_1 & q_1 &= 0 \\ p_2 &= -2m m_1 \beta & q_2 &= -p_1 \\ p_3 &= 0 & q_3 &= -p_2 \end{aligned} \quad \text{bestimmt sind.}$$

Mit Hülfe der folgenden Reductionsformeln:

$$\begin{aligned} \int e^{-2mt} \sin \beta t^v \cdot \cos \beta t \cdot dt &= \frac{1}{\beta(v+1)} e^{-2mt} \sin \beta t^{v+1} \\ &\quad + \frac{2m}{\beta(v+1)} \int e^{-2mt} \sin \beta t^{v+1} dt \\ \int e^{-2mt} \sin \beta t^v dt &= -\frac{1}{\beta^2 v^2 + 4m^2} e^{-2mt} \cdot \sin \beta t^{v-1} \cdot (\beta v \cos \beta t + 2m \sin \beta t) \\ &\quad + (v-1) \frac{\beta^2 v}{\beta^2 v^2 + 4m^2} \int e^{-2mt} \sin \beta t^{v-2} dt \end{aligned}$$

ist die Integration der Gleichung (9) oder (10) leicht auszuführen. Man erhält:

$$(11) \left\{ \beta(u-u_0) = \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^3 e^{-2mt} \left\{ \begin{aligned} &C_0 + 2C_1 \sin \beta t (\beta \cos \beta t + m \sin \beta t) \\ &\quad + 2C_2 \sin \beta t^3 (2\beta \cos \beta t + m \sin \beta t) \\ &\quad + C_3 \sin \beta t^4 \end{aligned} \right. \right\}$$

Darin ist:

$$\begin{aligned} C_0 &= -\left(\frac{3}{2}\beta \frac{2\beta(p_1-p_3)+mp_2}{4\beta^2+m^2} + p_3\right) \frac{\beta^2}{4m(\beta^2+m^2)}, & C_1 &= C_0 \frac{m}{\beta^2}, \\ C_2 &= -\frac{1}{8\beta} \frac{2\beta(p_1-p_3)+mp_2}{4\beta^2+m^2}, & C_3 &= \frac{p_3}{4\beta}. \end{aligned}$$

Eine analoge Form hat die Gleichung (12) für  $\beta(w-w_0)$ , deren entsprechende, von  $q_1, q_2, q_3$  abhängende Constanten durch  $C'_0, C'_1, C'_2, C'_3$  bezeichnet werden mögen. Diese Grössen  $C'$  sowie die  $C$  erhalten eine einfachere Form, wenn wir die Werthe von  $p_1, p_2, p_3$  und  $q_1, q_2, q_3$  einsetzen. Definiren wir ferner eine Grösse  $S$  durch die Gleichung:

$$S = \frac{m^2 m_1 - n^2 n_1}{4n^2 - 3m^2},$$

so wird nach leichten Umformungen:

$$(13) \left\{ \begin{aligned} C_0 &= -\frac{3}{4} \frac{\beta^4}{m n^2} S, & C'_0 &= -\frac{\beta^2}{8n^2} (m_1 - 3S), \\ C_1 &= \frac{m}{\beta^2} C_0, & C'_1 &= \frac{m}{\beta^2} C'_0, \\ C_2 &= -\frac{1}{4} S, & C'_2 &= \frac{m}{8\beta} (m_1 + S), \\ C_3 &= -\frac{m m_1}{2}, & C'_3 &= -\frac{1}{4\beta} (2m^2 m_1 - n^2 n_1). \end{aligned} \right.$$

Es mag noch bemerkt werden, dass das Nullwerden des Nenners von  $S$  ausgeschlossen ist durch die Voraussetzung  $n^2 > m^2$ .

Zur Festsetzung der Werthe der Integrationsconstanten  $u_0$  und  $w_0$  stellen wir die Anfangsbedingungen, dass für  $t=0$ , auch  $\varphi=0$  und  $\frac{d\varphi}{dt}=v_0$  sein soll, daraus folgt:

$$B=0, \quad A=\frac{v_0}{\beta} \quad \text{für: } t=0$$

und nach den Gleichungen (8):

$$u=0, \quad w=\frac{v_0}{\beta} \quad \text{für: } t=0$$

und hieraus:

$$-\beta u_0 = \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^3 C_0, \quad \beta\left(\frac{v_0}{\beta} - w_0\right) = \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^3 C_0.$$

Durch die Gleichung (3) in Verbindung mit (8), (11), (12), (13) ist ein Integral bestimmt, welches der Differentialgleichung (2) annähernd genügt; wir wollen jetzt zeigen, bis zu welchem Grade diese Annäherung reicht. Als Maass derselben kann eine Potenz der Grösse  $\frac{v_0}{\beta}$  dienen, deren physikalische Bedeutung zunächst zu untersuchen ist. Hierbei können wir ausgehen von:

$$\varphi_0 = \frac{v_0}{\beta} e^{-mt} \sin \beta t,$$

anstatt von der Gleichung für  $\varphi$ , da es sich jetzt nur um die Ordnung der Grösse  $\frac{v_0}{\beta}$  handelt. Es folgt daraus:

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = \frac{v_0}{\beta} e^{-mt} \{-m \sin \beta t + \varphi \cos \beta t\}.$$

Es erreiche zur Zeit  $t$ ,  $\varphi$  seinen grössten Werth, den Ausschlagswinkel  $\alpha_0$ , dann wird  $\frac{d\varphi_0}{dt} = 0$ , also:

$$\operatorname{tg} \beta t = \frac{\beta}{m}, \quad \sin \beta t = \frac{\beta}{n}$$

und hieraus:

$$\alpha_0 = \frac{v_0}{\beta} \frac{\beta}{n} \cdot e^{-\frac{m}{\beta} \arctan \frac{\beta}{m}},$$

woraus ersichtlich ist, dass  $\frac{v_0}{\beta}$ , abgesehen von endlichen Grössen, von der Ordnung des Ausschlagswinkels ist.

Aus den obigen Rechnungen ist nun ersichtlich, dass die durch (11) und (12) definirten Functionen  $u$  und  $w$  vollständig streng den Differentialgleichungen (9) und (10), also  $A$  und  $B$  den Gleichungen (6) und (7a) genügen, mithin:

$$\varphi = A e^{-nt} \sin(\beta t + B)$$

der Gleichung:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2m \frac{d\varphi}{dt} + n^2 \varphi = 2mm_1 \varphi_0^2 \frac{d\varphi_0}{dt} + n^2 n_1 \varphi_0^3,$$

worin:

$$\varphi_0 = \frac{v_0}{\beta} e^{-nt} \sin \beta t$$

ist. Dagegen sollte eine Function  $\varphi^*$  gefunden werden, sodass:

$$\frac{d^2 \varphi^*}{dt^2} + 2m \frac{d\varphi^*}{dt} + n^2 \varphi^* = 2mm_1 \varphi^{*2} \frac{d\varphi^*}{dt} + n^2 n_1 \varphi^{*3}$$

ist. Bilden wir die Differenz dieser Gleichung und der vorigen, so können wir auf der rechten Seite der entstehenden Formel, auf welcher nur Correctionsgrössen stehen,  $\varphi$  statt  $\varphi^*$  setzen, da es jetzt nur darauf ankommt, die Ordnung von  $\varphi - \varphi^*$  zu bestimmen. Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2(\varphi - \varphi^*)}{dt^2} + 2m \frac{d(\varphi - \varphi^*)}{dt} + n^2(\varphi - \varphi^*) \\ &= 2mm_1 \left( \varphi_0^2 \frac{d\varphi_0}{dt} - \varphi^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) + n^2 n_1 (\varphi_0^3 - \varphi^3). \end{aligned}$$

Setzen wir nun an Stelle der obigen Gleichungen (11) und (12) die folgenden der Kürze halber:

$$u = \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^3 U, \quad w = \frac{v_0}{\beta} \left( 1 + \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2 W \right),$$

so wird, wenn wir eine Grösse von der Ordnung  $\left( \frac{v_0}{\beta} \right)^n$  mit  $\left[ \frac{v_0}{\beta} \right]^n$  bezeichnen:

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{u}{w} = \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2 U \left( 1 - \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2 W + \left[ \frac{v_0}{\beta} \right]^4 \right), \\ B = \arctg \frac{u}{w} = \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2 U + \left[ \frac{v_0}{\beta} \right]^4 = \frac{\beta}{v_0} u + \left[ \frac{v_0}{\beta} \right]^4, \\ \sin B = \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2 U + \left[ \frac{v_0}{\beta} \right]^4, \quad \cos B = 1 + \left[ \frac{v_0}{\beta} \right]^4. \end{cases}$$

Hieraus folgt:



$$\sin(\beta t + B)^3 = \sin \beta t^3 + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^3.$$

Ferner ist:

$$(15) \quad \begin{cases} A^3 = u^2 + w^2 = \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \left(1 + 2\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4\right), \\ A = \frac{v_0}{\beta} \left(1 + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W\right) = w + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^5. \end{cases}$$

Darnach wird:

$$\varphi^3 = A^3 e^{-3mt} \sin(\beta t + B)^3 = \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^3 e^{-3mt} \sin \beta t^3 + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^5 e^{-3mt}$$

oder:

$$\varphi^3 - \varphi_0^3 = e^{-3mt} \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^5.$$

Ganz analog leitet man ab, dass:

$$\varphi^3 \frac{d\varphi}{dt} - \varphi_0^3 \frac{d\varphi}{dt} = \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^5$$

ist. Darnach erhält also die obige Gleichung für  $(\varphi - \varphi^*)$  die Form:

$$\frac{dd(\varphi - \varphi^*)}{dt^2} + 2m \frac{d(\varphi - \varphi^*)}{dt} + n^2 (\varphi - \varphi^*) = \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^5 F(t).$$

Da nun  $\varphi$  und  $\varphi^*$  und auch ihre Derivierten für  $t=0$  übereinstimmen, so würden die Anfangsbedingungen dieser Differentialgleichung sein:

$$t = 0, \quad \varphi - \varphi^* = 0 \quad \frac{d}{dt}(\varphi - \varphi^*) = 0.$$

Eine Integration dieser Gleichung würde, ganz wie diejenige der Gleichung (2), auf die Form führen:

$$\varphi - \varphi^* = A_1 e^{-mt} \sin(\beta t + B_1),$$

und zwar ist, infolge der eben ausgesprochenen Anfangsbedingungen:

$$A_1 = \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^5 W_1(\varphi, t), \quad B_1 = U_1(\varphi, t),$$

worin  $W_1$  und  $U_1$  eine den obigen  $W$  und  $U$  analoge Form besitzen, d. h. also  $\varphi - \varphi^*$  ist eine Grösse von der Ordnung  $\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^5$ .

Es ergibt sich daher das Theorem:

Die Function:

$$(3) \quad \varphi = A e^{-nt} \sin(\beta t + B); \quad \beta^2 = n^2 - m^2,$$

worin die von  $t$  abhängigen Grössen  $A$  und  $B$  durch folgende Gleichungen definiert sind:

$$A^2 = u^2 + w^2, \quad \operatorname{tg} B = \frac{u}{w},$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \beta u &= \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^3 C_0 (e^{-2mt} - 1) + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^3 e^{-2mt} \cdot \times \\ &\times \left\{ \begin{aligned} &2C_1 \sin \beta t (\beta \cos \beta t + m \sin \beta t) \\ &+ 2C_2 \sin \beta t^3 (2\beta \cos \beta t + m \sin \beta t) \\ &+ C_3 \sin \beta t^4 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right.$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \beta w &= v_0 + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^3 C'_0 (e^{-2mt} - 1) + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^3 e^{-2mt} \cdot \times \\ &\times \left\{ \begin{aligned} &2C'_1 \sin \beta t (\beta \cos \beta t + m \sin \beta t) \\ &+ 2C'_2 \sin \beta t^3 (2\beta \cos \beta t + m \sin \beta t) \\ &+ C'_3 \sin \beta t^4 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right.$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} C_0 &= -\frac{3}{4} \frac{\beta^4}{m n^2} S, & C'_0 &= -\frac{1}{8} \frac{\beta^3}{n^2} (m_1 - 3S), \\ C_1 &= \frac{m}{\beta^2} C_0, & C'_1 &= \frac{m}{\beta^2} C'_0, \\ C_2 &= -\frac{1}{4} S, & C'_2 &= \frac{1}{8} \frac{m}{\beta} (m_1 + S), \\ C_3 &= -\frac{m m_1}{2}, & C'_3 &= -\frac{1}{4} \frac{2m^2 m_1 - n^2 n_1}{\beta}, \\ & & S &= \frac{m^2 m_1 - n^2 n_1}{4n^2 - 3m^2} \end{aligned} \right.$$

genügt, wenn die fünften Potenzen des grössten Werthes von  $\varphi$  vernachlässigt werden, der allgemeinen Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2m(1 - m_1 \varphi^2) \frac{d\varphi}{dt} + n^2(\varphi - n_1 \varphi^3) = 0,$$

unter der Voraussetzung, dass  $n^2 > m^2$  ist, und mit den Anfangsbedingungen, dass für  $t = 0$ , auch  $\varphi = 0$  und  $\frac{d\varphi}{dt} = v_0$  sein soll.

Anmerkung. Bei Gelegenheit der obigen Untersuchung hat sich noch folgender Satz ergeben:

## § 3.

Aus dem gewonnenen Integral sind die Gleichungen für die der Beobachtung zugänglichen Grössen, die Schwingungsdauer, das logarithmische Decrement, und für den Ausschlagswinkel bei einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit abzuleiten.

Aus (3) folgt für die Schwingungsdauer  $\tau$ , d. i. für die kleinste Differenz zweier Werthe von  $t$ , für welche  $q=0$  wird, die Bedingungsgleichung:

$$\beta\tau + B(\tau) = \pi,$$

worin  $\tau$  als Argument von  $B$  hinzugefügt ist. Nach (14) ist:

Die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + P(q) \frac{dq}{dt} + Q(q) = 0$$

besitzt einen nur von  $t$  abhängigen integrierenden Factor nur dann, wenn:

$$P(q) = \frac{1}{C} \frac{dQ(q)}{dq} + C$$

ist, und zwar ist dieser Factor  $e^{Ct}$ . Dadurch wird die ursprüngliche Gleichung auf folgende:

$$e^{Ct} \left( \frac{dq}{dt} + \frac{Q(q)}{C} \right) = \text{Constans}$$

zurückgeführt. In unserem Falle ist:

$$P(q) = 2m(1 - m_1 q^2), \quad Q(q) = n^2(q - n_1 q^3),$$

$$\frac{dQ(q)}{dq} = n^2(1 - 3n_1 q^2).$$

Es müsste also, damit die obige Bedingung erfüllt ist:

$$2m(1 - m_1 q^2) = \frac{n^2}{C}(1 - 3n_1 q^2) + C,$$

oder:

$$C = m \pm \sqrt{m^2 - n^2}, \quad m_1 = \frac{3}{2} n_1 \frac{n^2}{mC}$$

sein.  $C$  also auch  $m_1$  würde daher nur im Falle einer aperiodischen Schwingung reell sein. Eine specielle Anwendung des obigen Satzes (für  $P = \text{Const.}$ ,  $Q(q) = n^2 q$ ) liegt dem Verfahren zu Grunde, welches Du Bois-Reymond (Berlin. Monatsber. p. 539, 1870) bei der Integration der Differentialgleichung der Bewegung aperiodisch schwingender Magnete befolgt hat.

$$B = \arctan \frac{u}{w} = \frac{\beta}{v_0} u + \left[ \frac{v_0}{\beta} \right]^4.$$

Das Glied  $\left[ \frac{v_0}{\beta} \right]^4$  vernachlässigen wir, da zu diesem noch Theile hinzukommen würden, wenn in der Differentialgleichung (2) die Glieder von der Ordnung  $\varphi^6$  berücksichtigt würden. Wir werden also für die Schwingungsdauer eine nur von dem Quadrate des Ausschlagswinkels abhängende Correction erhalten, d. h. eine für die Praxis wohl immer ausreichend genaue Bestimmung. Es wird daher nach (14) die Gleichung für  $\tau$ :

$$(16) \quad \beta \tau + \frac{\beta}{v_0} u(\tau) = \pi,$$

Wir berechnen zunächst bis auf vierte Potenzen von  $\frac{v_0}{\beta}$  einen Werth  $\tau_1$  aus der Gleichung:

$$(16a) \quad \beta \tau_1 + \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2 \frac{C_0}{\beta} (e^{-2m\tau_1} - 1) = \pi,$$

in der das zweite Glied der linken Seite gleich dem, trigonometrische Functionen nicht enthaltenden, Theile der Gleichung (11) ist. Mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von  $m$  ergibt sich ein erster Näherungswerth  $\tau_2$  aus:

$$\beta \tau_2 + \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2 \frac{C_0}{\beta} (-2m\tau_2) = \pi,$$

nämlich:

$$\tau_2 = \frac{\pi}{\beta - \frac{2m}{\beta} \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2 C_0} = \frac{\pi}{\beta} \left( 1 + \frac{2m}{\beta^2} \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2 C_0 + \left[ \frac{v_0}{\beta} \right]^4 \right).$$

$$\text{Sei nun:} \quad \tau_1 = \tau_2 + \frac{\delta_1}{\beta},$$

so wird:

$$e^{-2m\tau_1} = e^{-2m\frac{\delta_1}{\beta}} e^{-2m\frac{\pi}{\beta}} \left( 1 - \frac{4m^2\pi}{\beta^3} \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2 C_0 + \left[ \frac{v_0}{\beta} \right]^4 \right)$$

und es geht (16a) über in:

$$\begin{aligned} & \delta_1 + \frac{2m\pi}{\beta^2} \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2 C_0 + \left[ \frac{v_0}{\beta} \right]^4 \\ & + \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2 \frac{C_0}{\beta} \left( e^{-\frac{2m}{\beta}(\delta_1 + \pi)} \left\{ 1 - \frac{4m^2\pi}{\beta^3} \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2 C_0 + \left[ \frac{v_0}{\beta} \right]^4 \right\} - 1 \right) = 0. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass  $\delta_1$  von der Ordnung  $\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2$  ist, also  $\delta_1^2$  und  $\delta_1 \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2$  vernachlässigt werden können, sodass wir erhalten:

$$\delta_1 + \frac{2m\pi}{\beta^2} \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 C_0 + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \frac{C_0}{\beta} \left(e^{-\frac{2m\pi}{\beta}} - 1\right) + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4 = 0.$$

Die Einsetzung von  $\tau_2$  und  $\delta_1$  in die Gleichung:

$$\tau_1 = \tau_2 + \frac{\delta_1}{\beta}$$

ergibt: 
$$\tau_1 = \frac{\pi}{\beta} - \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \frac{C_0}{\beta^2} \left(e^{-\frac{2m\pi}{\beta}} - 1\right) + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4.$$

Sei endlich die gesuchte Grösse  $\tau$ , welche der Gleichung:

$$\beta\tau + \frac{\beta}{v_0} u(\tau) = \pi$$

genügen soll, gleich  $\tau_1 + \frac{\delta}{\beta}$ , so ist diese Gleichung jetzt zurückgeführt auf die folgende:

$$\delta + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \frac{e^{-2m\left(\tau_1 + \frac{\delta}{\beta}\right)}}{\beta} \cdot \times \left\{ \begin{array}{l} 2C_1 \sin(\beta\tau_1 + \delta) \{ \beta \cos(\beta\tau_1 + \delta) + m \sin(\beta\tau_1 + \delta) \} \\ + 2C_2 \sin(\beta\tau_1 + \delta)^3 \{ 2\beta \cos(\beta\tau_1 + \delta) + m \sin(\beta\tau_1 + \delta) \} \\ + C_3 \sin(\beta\tau_1 + \delta)^4 \end{array} \right\} + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4 = 0.$$

Diese zeigt wieder, dass die Grössen  $\delta^2$  und  $\delta \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2$  zum mindesten von der Ordnung  $\left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4$  sind.

In den Argumenten der trigonometrischen Functionen brauchen daher nur die Glieder ohne  $\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2$  und ohne  $\delta$  berücksichtigt zu werden; nun ist:

$$\begin{aligned} \sin(\beta\tau_1 + \delta) &= \sin \beta\tau_1 + \delta \cdot \cos \beta\tau_1 \\ &= \sin \left( \pi - \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2 \right) + \delta \cdot \cos \left( \pi - \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2 \right) \\ &= \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2. \end{aligned}$$

d. h.  $\delta$  besitzt nur einen Werth von der Ordnung  $\left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4$ .  
Die Gleichung:

$$(17) \quad \tau = \frac{\pi}{\beta} - \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \frac{C_0}{\beta^2} \left(e^{-\frac{2m\pi}{\beta}} - 1\right) + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4$$

stellt daher die Schwingungsdauer dar. Die Grösse  $\frac{v_0}{\beta}$  wird passender noch durch den Ausschlagswinkel  $\alpha$  ausgedrückt. Die Differentiation des Integrals:

$$q = A e^{-mt} \sin(\beta t + B)$$

gibt mit Rücksicht auf (6):

$$\frac{dq}{dt} = A e^{-mt} \{-m \sin(\beta t + B) + \beta \cos(\beta t + B)\}.$$

Daraus folgt, dass zur Zeit  $t'$ , wenn  $\left(\frac{dq}{dt}\right)_{t=t'} = 0$ :

$$\operatorname{tg}(\beta t' + B(t')) = \frac{\beta}{m}, \quad \sin(\beta t' + B(t')) = \frac{\beta}{n}$$

wird, also der Ausschlagswinkel:

$$\alpha = A(t') \frac{\beta}{n} \cdot e^{-mt'}.$$

Nach (15) ist nun:

$$A = \frac{v_0}{\beta} \left(1 + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W\right) + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^5$$

und daher:

$$\alpha = \frac{v_0}{\beta} \left(1 + \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W(t')\right) e^{-mt'} \frac{\beta}{n} + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^5$$

$$\frac{v_0}{\beta} = \alpha \frac{n}{\beta} e^{mt'} \left\{ 1 - \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 W(t') + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4 \right\}$$

$$\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 = \alpha^2 \frac{n^2}{\beta^2} e^{2mt'} + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4.$$

Ferner ist:  $\beta t' + B(t') = \arccos \frac{\beta}{m},$

und mit Rücksicht auf (14):

$$t' = \frac{1}{\beta} \arccos \frac{\beta}{m} + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^3,$$

daher wird:

$$(18) \quad \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 = \alpha^2 \frac{n^2}{\beta^2} e^{\frac{2m}{\beta} \arccos \frac{\beta}{m}} + [\alpha]^4.$$

Gleichung (17) erhält darnach die Form:

$$\tau = \frac{\pi}{\beta} - \alpha^2 \frac{n^2 C_0}{\beta^4} e^{\frac{2m}{\beta} \arctan \frac{\beta}{m}} \left( e^{-\frac{2m\pi}{\beta}} - 1 \right) + [\alpha]^4,$$

oder nach dem Einsetzen des Werthes von  $C_0$ :

$$(19) \quad \tau = \frac{\pi}{\beta} (1 - S_1 \alpha^2) + [\alpha]^4,$$

worin:

$$S_1 = \frac{3}{4} \frac{S}{m} \frac{\beta}{\pi} \cdot e^{\frac{2m}{\beta} \arctan \frac{\beta}{m}} \left( 1 - e^{-\frac{2m\pi}{\beta}} \right)$$

ist, und wie oben:

$$S = \frac{m^2 m_1 - n^2 n_1}{4m^2 - 3m^2}.$$

Hieraus ist zunächst ersichtlich, dass das Vorzeichen von  $S_1$  durch  $S$  bestimmt wird, also wesentlich von dem Verhältniss der Werthe  $m_1$  und  $n_1$  abhängig ist. Bei rascher Abnahme der Dämpfung mit wachsendem Winkel tritt der Fall ein, dass die Schwingungsdauer mit wachsendem Bogen abnimmt, also eine Correction anzubringen ist, die sogar das entgegengesetzte Zeichen hat wie die gewöhnlich angewandte. So hat z. B. bei beiden oben untersuchten Multiplicatoren  $S$  einen positiven Werth, wie die unten angegebenen Zahlen lehren werden.

Ist im speciellen Falle  $m^2 m_1 - n^2 n_1 = 0$ , so sind die Schwingungsbogen nahezu ohne Einfluss auf die Schwingungsdauer. Für  $m_1 = 0$  dagegen hat immer die Correctionsgrösse ( $-S_1$ ) das positive Vorzeichen. Für  $m = 0$ ,  $m_1 = 0$ ,  $n_1 = \frac{1}{1.2.3}$  endlich, in welchem Falle die Differentialgleichung (2) in die folgende, abgesehen von fünften Potenzen von  $\varphi$ :

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + n^2 \sin \varphi = 0$$

übergeht, erhält man aus der Gleichung (19) mit Berücksichtigung des Grenzwertes:

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\frac{2m\pi}{\beta}}}{m} = \frac{2\pi}{\beta}, \text{ für } \lim_{m \rightarrow 0} m = 0$$

und der Gleichung:

$$\arctg \frac{\beta}{m} + \arctg \frac{m}{\beta} = \frac{\pi}{2}$$

die bekannte Formel:

$$\tau = \frac{\pi}{\beta} \left( 1 + \frac{1}{16} \alpha^2 + [\alpha]^4 \right).$$

#### § 4.

Zweitens soll das logarithmische Decrement als Function des Ausschlagswinkels bestimmt werden.

Es war oben (p. 464) schon die Gleichung für den ersten Ausschlagswinkel  $\alpha_1$  abgeleitet:

$$\alpha_1 = A(t') \frac{\beta}{n} e^{-m t'};$$

für den darauf folgenden  $\alpha_2$  folgt analog:

$$\alpha_2 = A(t'') \frac{\beta}{n} e^{-m t''}.$$

Die gegenseitige Abhängigkeit der Zeiten  $t'$  und  $t''$  voneinander ist, wie aus der Formel für  $\frac{d\varphi}{dt}$  folgt, durch die Gleichung:

$$\beta t'' + B(t'') = \beta t' + B(t') + \pi,$$

oder, wenn:

$$t'' - t' = \tau'$$

gesetzt wird, durch die folgende:

$$(20) \quad \beta \tau' + B(\tau' + t') - B(t') = \pi$$

bestimmt.

Nach einem Verfahren, das dem bei der Bestimmung von  $\tau$  angewandten ganz analog ist, werde zunächst die Gleichung:

$$\beta \tau_1' + \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2 \frac{C_0}{\beta} e^{-2m t'} \left( e^{-2m \tau_1'} - 1 \right) = \pi$$

nach  $\tau_1'$  aufgelöst; man erhält:

$$\tau_1' = \frac{\pi}{\beta} - \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2 \frac{C_0}{\beta^2} e^{-2m t'} \left( e^{-\frac{2m\pi}{\beta}} - 1 \right) + \left[ \frac{v_0}{\beta} \right]^4$$

In die allgemeine Gleichung (20), die, abgesehen von vierten Potenzen, auch so lauten kann:

$$\beta \tau' + \frac{\beta}{v_0} u(\tau' + t') - \frac{\beta}{v_0} u(t') = \pi,$$



werde dann eingesetzt:

$$\tau' = \tau_1 + \frac{\delta}{\beta}.$$

Berücksichtigt man, dass im Argumente der trigonometrischen Functionen in dem Ausdrücke für  $u$ , da diese Glieder schon den Factor  $\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2$  besitzen, nur die Grössen ohne den Factor  $\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2$  und ohne  $\delta$  beachtet zu werden brauchen, und wendet die Gleichungen an:

$$(21) \quad \begin{cases} \sin(\beta\tau' + \beta t') = -\sin \beta t' + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2 \\ \cos(\beta\tau' + \beta t') = -\cos \beta t' + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2, \end{cases}$$

so wird man erhalten:

$$\tau' = \frac{\pi}{\beta} - \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 e^{-\frac{2m\pi}{\beta}} \frac{1}{\beta^2} e^{-2mt} \left\{ \begin{aligned} &C_0 + 2C_1 \sin \beta t' (\beta \cos \beta t' + m \sin \beta t') \\ &+ 2C_2 \sin \beta t'^2 (2\beta \cos \beta t' + m \sin \beta t') \\ &+ 2C_3 \sin \beta t'^4 \end{aligned} \right\}$$

woraus sich mit Hülfe der Gleichungen:

$$\sin \beta t' = \frac{\beta}{n} + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2, \quad \cos \beta t' = \frac{m}{n} + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^2,$$

und nach Einsetzen der Werthe der Constanten  $C_0$   $C_1$   $C_2$   $C_3$  (13) ergibt:

$$(22) \quad \tau' = \frac{\pi}{\beta} - \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 \frac{\beta^2}{2n^2 m} \left(1 - e^{-\frac{2m\pi}{\beta}}\right) \left(\frac{3S}{2} + \frac{m^2}{n^2} (m_1 + 9S)\right) e^{-2mt},$$

und hieraus infolge von:

$$\begin{aligned} \left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 &= \alpha_1^2 \frac{n^2}{\beta^2} e^{2mt'} + \left[\frac{v_0}{\beta}\right]^4 \\ \tau' &= \frac{\pi}{\beta} - \alpha_1^2 \frac{1}{2m} \left(1 - e^{-\frac{2m\pi}{\beta}}\right) \left(\frac{3S}{2} + \frac{m^2}{n^2} (m_1 + 9S)\right). \end{aligned}$$

Diesen Werth werden wir später in die Gleichung für das Decrement einsetzen. Aus den beiden Formeln für  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  ergibt sich zunächst:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{A(t')}{A(t' + \tau')} e^{m\tau'}.$$

Nun war nach (15):

$$A(t') = w(t') + \left[ \frac{v_0}{\beta} \right]^5 = \frac{v_0}{\beta} \left( 1 + \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2 W(t') \right) + \left[ \frac{v_0}{\beta} \right]^5$$

oder, wenn wir:  $A(t') = e^{A_1(t')}$

setzen, so wird:

$$A_1(t') = \log \frac{v_0}{\beta} + \log \left( 1 + \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2 W(t') \right)$$

$$= \log \frac{v_0}{\beta} + \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2 W(t') + \left[ \frac{v_0}{\beta} \right]^4$$

und daher:

$$\frac{A(t')}{A(t'+\tau')} = e^{A_1(t') - A_1(t'+\tau')} = e^{\left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2 (W(t') - W(t'+\tau'))}$$

Das logarithmische Decrement  $\lambda$  ist also:

$$(23) \quad \lambda = \log \text{nat} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = m\tau' + \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2 \{ W(t') - W(t'+\tau') \},$$

worin:

$$W(t') = \frac{C'_0}{\beta} \left( e^{-2m\tau'} - 1 \right) + \frac{e^{-2m\tau'}}{\beta} \cdot \times \left\{ \begin{array}{l} 2C'_1 \sin \beta t' (\beta \cos \beta t' + m \sin \beta t') \\ + 2C'_2 \sin \beta t'^3 (2\beta \cos \beta t' + m \sin \beta t') \\ + C'_3 \sin \beta t'^4 \end{array} \right\}$$

ist. Bei der Bildung der Differenz  $W(t') - W(t'+\tau')$  sind die Gleichungen (21) zu berücksichtigen, und man erhält so:

$$W(t') - W(t'+\tau') = e^{-2m\tau'} (1 - e^{-2m\tau'}) \cdot \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{C'_0}{\beta} + \frac{2C'_1}{\beta} \sin \beta t' (\beta \cos \beta t' + m \sin \beta t') \\ + \frac{2C'_2}{\beta} \sin \beta t'^3 (2\beta \cos \beta t' + m \sin \beta t') \\ + \frac{C'_3}{\beta} \sin \beta t'^4 \end{array} \right\}.$$

Die weitere Ausrechnung, die ganz analog der bei der Ableitung von  $\tau'$  durchgeführten ist, ergibt dann:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2 \{ W(t') - W(t'+\tau') \} \\ &= -\frac{\alpha_1^2}{4} \left( 1 - e^{-\frac{2m\pi}{\beta}} \right) \left( \frac{m_1 - 3S}{2} + \frac{m^2}{n^2} (m_1 - 9S) - n_1 \right) \end{aligned}$$

Dieser Werth, sowie der von  $\tau'$ , sind in die Gleichung (23) einzusetzen, und man erhält dann:

$$\lambda = \frac{m\pi}{\beta} - \frac{\alpha_1^2}{8} \left\{ (m_1 + 3S) \left( 1 + 6 \frac{m^2}{n^2} \right) - 2n_1 \right\} \left\{ 1 - e^{-\frac{2m\pi}{\beta}} \right\},$$

oder mit Hülfe von:

$$m_1 + 3S = n^2 \frac{4m_1 - 3n_1}{4n^2 - 3m^2}$$

den zur Rechnung bequemern Ausdruck:

$$(24) \quad \lambda = \frac{m\pi}{\beta} - \frac{\alpha_1^2}{8} \left\{ m_1 \frac{1 + 6 \frac{m^2}{n^2}}{1 - \frac{3}{4} \frac{m^2}{n^2}} - \frac{11}{4} n_1 \frac{1 + \frac{11}{4} \frac{m^2}{n^2}}{1 - \frac{3}{4} \frac{m^2}{n^2}} \right\} \left\{ 1 - e^{-\frac{2m\pi}{\beta}} \right\}.$$

Hieraus geht hervor, dass die Dämpfung mit wachsendem Ausschlagswinkel abnimmt, wenn:

$$m_1 \left( 1 + 6 \frac{m^2}{n^2} \right) > \frac{11}{4} n_1 \left( 1 + \frac{11}{4} \frac{m^2}{n^2} \right)$$

ist, wie es bei den meisten Galvanometern der Fall sein wird. Ist dagegen die Dämpfungsfunktion constant, also  $m_1 = 0$ , so nimmt das Decrement um eine  $n_1$  proportionale Grösse mit wachsendem Ausschlagswinkel zu.

### § 5.

Zur Ableitung der Formel für die Anfangsgeschwindigkeit gehen wir von der Gleichung:

$$\alpha_1 = A(t) \frac{\beta}{n} e^{-mt'} = \frac{v_0}{\beta} \left( 1 + \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2 W(t') \right) \cdot \frac{\beta}{n} \cdot e^{-mt'}$$

aus, welche:

$$v_0 = n \alpha_1 e^{mt'} \left( 1 - \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2 W(t') \right)$$

ergibt. Der Werth von  $t'$ , der zunächst bestimmt werden muss, war durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg}(\beta t' + B(t')) = \frac{\beta}{m}$$

definiert, die mit Hülfe von (14) die Form:

$$\beta t' + \frac{\beta}{v_0} u(t') = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{m}$$

erhält. Um hieraus  $t'$  zu bestimmen, sind in den Ausdruck (11) für  $u(t')$  die Gleichungen:

$$(25) \quad \sin \beta t' = \frac{\beta}{n} + \left[ \frac{v_0}{\beta} \right]^2, \quad \cos \beta t' = \frac{m}{n} + \left[ \frac{v_0}{\beta} \right]^2$$

einzusetzen und in die Glieder, welche schon den Factor  $\left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2$  haben, der Werth für  $t'$ :

$$t' = \frac{1}{\beta} \arctg \frac{\beta}{m} + \left[ \frac{v_0}{\beta} \right]^2,$$

endlich die Gleichung:

$$\left( \frac{v_0}{\beta} \right)^3 = \alpha_1^3 \frac{n^3}{\beta^3} e^{3mt'}$$

und die Werthe der Constanten  $C$ . Man erhält dann nach leichten Ausrechnungen:

$$t' = \frac{1}{\beta} \arctg \frac{\beta}{m} + \frac{\alpha_1^2}{2m} \left\{ 3S \left( 1 - e^{-\frac{2m}{\beta} \arctg \frac{\beta}{m}} \right) + \frac{m^2}{n^2} (m_1 + 9S) \right\}.$$

Es ist daher:

$$(26) \quad e^{mt'} = e^{\frac{m}{\beta} \arctg \frac{\beta}{m}} \left\{ 1 + \frac{\alpha_1^2}{2} \left( \frac{3S}{2} \left\{ 1 - e^{-\frac{2m}{\beta} \arctg \frac{\beta}{m}} \right\} + \frac{m^2}{n^2} (m_1 + 9S) \right) + [\alpha]^4 \right\}.$$

Die zur Bestimmung von  $v_0$  noch nöthige Berechnung von  $\left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2 W(t')$  ist schon auf p. 468 durchgeführt. Setzt man die Werthe von  $\sin \beta t'$ ,  $\cos \beta t'$  nach (25) und die Ausdrücke für die Constanten  $C_0'$ ,  $C_1'$ ,  $C_2'$ ,  $C_3'$  in die dortige Gleichung ein, so ergibt sich:

$$(27) \quad \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2 W(t') = \alpha_1^2 \left( -\frac{1}{8} (m_1 - 3S) \left( 1 - e^{\frac{2m}{\beta} \arctg \frac{\beta}{2m}} \right) - \frac{m^2}{4n^2} (m_1 - 9S) + \frac{n_1}{4} \right).$$

Infolge der Gleichungen (26) und (27) geht schliesslich:

$$v_0 = n \alpha_1 e^{mt'} \left( 1 - \left( \frac{v_0}{\beta} \right)^2 W(t') \right) \quad \text{in:}$$

$$v_0 = n \alpha_1 e^{\frac{m}{\beta} \arctg \frac{\beta}{m}} \left\{ 1 - \frac{\alpha_1^2}{8} \left( (m_1 + 3S) \left( e^{\frac{2m}{\beta} \arctg \frac{\beta}{m}} - 1 - 6 \frac{m^2}{n^2} \right) + 2n_1 \right) \right\}$$

über, oder in:

$$(28) \left\{ \begin{aligned} v_0 &= n \alpha_1 e^{\frac{m}{\beta} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\beta}{m}} \cdot \times \\ &\times \left\{ 1 - \frac{\alpha_1^2}{8} \left( \frac{m_1 - \frac{3}{2} n_1}{1 - \frac{3}{2} \frac{m^2}{n^2}} e^{\frac{2m}{\beta} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\beta}{m}} - m_1 \frac{1 + 6 \frac{m^2}{n^2}}{1 - \frac{3}{2} \frac{m^2}{n^2}} + \frac{1}{4} n_1 \frac{1 + 12 \frac{m^2}{n^2}}{1 - \frac{3}{2} \frac{m^2}{n^2}} \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Nach (24) ist nun für  $\alpha_1 = 0$ , d. h. für unendlich kleine Schwingungsbogen das log. Decrement  $A$  durch die Gleichung:

$$\frac{m}{\beta} = \frac{A}{\pi}$$

bestimmt, demnach ist:  $\frac{m^2}{n^2} = \frac{A^2}{A^2 + \pi^2}$ .

Durch Einsetzen dieser Gleichung in die mit  $\alpha_1^2$  multiplicirten Glieder der Formel (24) und (28) erhalten diese die einfachere im Folgenden angegebene Gestalt.

Die letzten Resultate lassen sich zu dem Satze zusammenfassen:

*Aus dem Integrale der allgemeinen Differentialgleichung:*

$$(3) \quad \frac{d^2 q}{dt^2} + 2m(1 - m_1 q^2) \frac{dq}{dt} + n^2(q - n_1 q^3) = 0$$

mit den Anfangsbedingungen: Für  $t=0$  ist  $q=0$  und  $\frac{dq}{dt} = v_0$ , ergeben sich für die Schwingungsdauer  $\tau$ , für das logarithmische Decrement  $\lambda = \log \operatorname{nat} \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$  und für die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ , als Functionen des Ausschlagswinkels  $\alpha_1$  ( $\alpha_2$  ist der nächstfolgende Ausschlag nach der entgegengesetzten Seite) mit Vernachlässigung der Grössen von der Ordnung  $\alpha_1^4$ , folgende Gleichungen:

$$(19) \quad \tau = \frac{\pi}{\beta} (1 - S_1 \alpha_1^2), \quad \beta^2 = n^2 - m^2,$$

$$(24) \quad \lambda = \frac{\pi}{\beta} m (1 - S_2 \alpha_1^2),$$

$$(28) \quad v_0 = n \alpha_1 e^{\frac{m}{\beta} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\beta}{m}} (1 - S_3 \alpha_1^2).$$

Bezeichnet man mit  $A$  das logarithmische Decrement für „unendlich“ kleine Schwingungsbogen, so ist:

$$S_1 = \frac{1}{4} S \frac{1 - e^{-2A}}{A} e^{\frac{2A}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{A}};$$

$$S = \frac{1}{4} \frac{G m_1 - n_1}{1 - \frac{1}{4} G}; \quad G = \frac{A^2}{A^2 + \pi^2};$$

$$S_2 = \frac{1}{4} \frac{1 - e^{-2A}}{A} S_2^*;$$

$$S_2^* = m_1 \frac{1+6G}{1-\frac{1}{4}G} - \frac{1}{4} n_1 \frac{1+\frac{1}{4}G}{1-\frac{1}{4}G} = \frac{4m_1(7A^2 + \pi^2) - n_1(23A^2 + 11\pi^2)}{A^2 + 4\pi^2};$$

$$S_3 = \frac{1}{4} (S_3^* - S_2^*); \quad S_3^* = \frac{m_1 - \frac{1}{4} n_1}{1 - \frac{1}{4} G} e^{\frac{2A}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{A}}.$$

Um also den numerischen Werth der Correctionsgrössen  $S_1, S_2, S_3$  bestimmen zu können, ist nur die Kenntniss von  $A$ ,  $n_1$  und  $m_1$  nothwendig.

Der Uebersichtlichkeit halber seien noch die Gleichungen hinzugefügt, welche die Constanten  $n, m, n_1, m_1$  auf, der Beobachtung zugängliche, Grössen zurückführen:

$$(24_a) \left\{ \begin{array}{l} n = \frac{1}{\tau_0} \sqrt{\lambda_0^2 + \pi^2}, \quad n_1 = \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{f}{MT}}; \\ m = \frac{\lambda}{\tau_0} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \pi^2}}{\sqrt{\lambda_0^2 + \pi^2}} \left( 1 + \frac{\pi^2}{\lambda^2 + \pi^2} S_2 \alpha_1^2 \right) \text{ aus (24):} \end{array} \right.$$

$$\text{und } \frac{m}{\beta} = \frac{\lambda}{\pi} (1 + S_2(\lambda) \cdot \alpha_1^2), \quad \frac{m\pi}{\beta} = A = \lambda (1 + S_2(\lambda) \cdot \alpha_1^2),$$

worin  $S_2(\lambda)$  die oben definirte Grösse  $S_2$  bedeutet, wenn überall  $\lambda$  statt  $A$  eingesetzt ist. Allgemein kann in den obigen  $S_1, S_2, S_3$  die Substitution  $\lambda$  statt  $A$  gemacht werden, die nur einen Einfluss auf Glieder mit  $\alpha_1^4$  ausübt.

Ferner ist:

$$m = \frac{\lambda_0}{\tau_0} + M$$

$$m_1 = \frac{M}{m} M_1$$

$$M(1 - M_1 \varphi^2) = \frac{1}{2KW} \cdot \left( \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2.$$

Die Bedeutung der hierin vorkommenden Grössen ist dieselbe wie auf p. 453 und 294:

## § 6.

Für die beiden Multiplicatoren, an denen die angegebenen Beobachtungen ausgeführt sind, ergeben sich mit Benutzung der oben (p. 292, 296) angegebenen Werthe:

Mult. I	Mult. II
$M = 0,03428$	$M = 0,03712$
$M_1 = 3,553$	$M_1 = 20,084$
$\lambda_0 \log e = 0,004$	$\lambda_0 \log e = 0,007$
$\tau_0 = 30,30$	$\tau_0 = 20,44$
$\frac{f}{MT} = 1,222$	$\frac{f}{MT} = 0,0093$

die Grössen:

$m = 0,03459$	$n = 0,10369$	$m = 0,03791$	$n = 0,15370$
$m_1 = 3,521$	$n_1 = 0,07500$	$m_1 = 19,666$	$n_1 = 0,16513$

und hieraus für den:

Mult. I	Mult. II
$\tau = \frac{\pi}{\beta} (1 - 0,12425 \alpha_1^2)$	$\tau = \frac{\pi}{\beta} (1 - 0,70430 \alpha_1^2)$
$\lambda = \frac{\pi}{\beta} m (1 - 0,61713 \alpha_1^2)$	$\lambda = \frac{\pi}{\beta} m (1 - 3,4453 \alpha_1^2)$

$$v_0 = n \alpha_1 e^{\frac{m}{\beta} \arctg \frac{\beta}{m}} (1 - 0,35975 \alpha_1^2); \quad v_0 = n \alpha_1 e^{\frac{m}{\beta} \arctg \frac{\beta}{m}} (1 - 1,5629 \alpha_1^2).$$

Für  $\alpha_1 = (3^0) = 0,05236 \dots$

erhalten die Correctionsgrössen, (bezeichnet wie auf p. 472) die Werthe:

$S_1 \alpha_1^2 = 0,0003$	$S_1 \alpha_1^2 = 0,0019$
$S_2 \alpha_1^2 = 0,0017$	$S_2 \alpha_1^2 = 0,0095$
$S_3 \alpha_1^2 = 0,0006$	$S_3 \alpha_1^2 = 0,0043$

und für  $\alpha_1 = (6^0) = 0,10472 \dots$

$S_1 \alpha_1^2 = 0,0012$	$S_1 \alpha_1^2 = 0,0077$
$S_2 \alpha_1^2 = 0,0068$	$S_2 \alpha_1^2 = 0,0378$
$S_3 \alpha_1^2 = 0,0025$	$S_3 \alpha_1^2 = 0,0171$

Vergleicht man hiermit die Grösse der Correction, welche bisher bei den Beobachtungen am Galvanometer, abgesehen von Scalenreductionen, allein angewandt ist, nämlich die Correction der Schwingungsdauer auf „unendlich“ kleine Bogen, d. i.  $\frac{1}{16} \alpha_1^2$ , deren Werthe sind für:

$$\alpha_1 = (3^\circ) \quad \frac{1}{16} \alpha_1^2 = 0,0002$$

$$\alpha_1 = (6^\circ) \quad \frac{1}{16} \alpha_1^2 = 0,0007,$$

also kleiner als die oben berechneten Correctionen, so wird man die Nothwendigkeit, auch die Grössen  $S_1$   $S_2$   $S_3$  in manchen Fällen berücksichtigen zu müssen, nicht zurückweisen können.

Unter den angegebenen Formeln ist diejenige für die Dämpfung (24) einer Controle durch die Beobachtung unmittelbar zugänglich.

An dem Multiplicator II wurde, um diese Controle auszuführen, das logarithmische Decrement bei verschiedenen grossen Ausschlägen bestimmt, mit Benutzung von Inductionsströmen, die durch einen Magnetinductor in verschiedener Intensität erzeugt werden konnten. Die mit Anwendung der Zurückwerfungsmethode so erhaltenen Werthe sind in der folgenden Tab. 5 angegeben in den Rubriken „Beob.“;  $s_1$  bedeutet den zugehörigen ersten Ausschlag in Scalentheilen. Der für  $s_1 = 71,7$  beobachtete Werth ist dann jedesmal als das für unendlich kleine Schwingungen geltende Decrement angenommen, und darnach sind die unter „Ber.“ angegebenen Zahlen aus der über der Tabelle angegebenen Formel erhalten.

Tabelle V. Galvanometer II.

$$\lambda = \frac{m\pi}{\beta} \left( 1 - 3,4453 \left( \frac{s_1}{2r} \right)^2 \right) \quad r = 4120 \text{ mm}$$

$s_1$	$\lambda \log e$					
	$\text{Juni 12 } t = 18,05^\circ$		$\text{Juni 12 } t = 19,75^\circ$		$\text{Juni 13 } t = 18,05^\circ$	
	Beob.	Ber.	Beob.	Ber.	Beob.	Ber.
71,7	0,34429	—	0,34227	—	0,34479	—
342,4	0,34229	0,34225	0,34099	0,34024	0,34305	0,34274
538,5	0,33890	0,33924	0,33713	0,33724	0,33947	0,33972

Die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung kann man wohl als eine genügende ansehen.

Die abgeleiteten Formeln mögen schliesslich noch Anwendung finden auf die Bestimmung der Correction, welche an dem berechneten Werthe der *magnetischen Inclination*



anzubringen ist, der mit dem Multiplicator II in Verbindung mit dem zu diesem Zwecke im hiesigen magnetischen Observatorium aufgestellten Weber'schen Erdinductor erhalten wird. Wendet man die Zurückwerfungsmethode an, so bedarf auch die bekannte Formel, welche aus den beiden Grenzwerten der Schwingungsbogen  $a$  und  $b$  den ersten Ausschlag berechnen lehrt, noch einer von  $a$  und  $b$  abhängigen Correction.

Wenn nach  $\nu$  Inductionsstößen der Magnet bei seinem zweiten (von dem letzten Stosse an gezählten) Durchgange durch die Ruhelage die Geschwindigkeit  $v_{2\nu+1}$  besitzt, und in diesem Augenblicke durch einen neuen, seiner Bewegung entgegenwirkenden Inductionsstoss die Geschwindigkeit  $v_0$  erhält, so wird der folgende Ausschlagswinkel  $\alpha_{2\nu+1}$  gemäss der Gleichung (28) bestimmt durch:

$$(29) \quad v_0 - v_{2\nu+1} = n \cdot \alpha_{2\nu+1} e^{\frac{m}{\beta} \arctan \frac{\beta}{m}} (1 - S_3 \alpha_{2\nu+1}^2).$$

Die dann ungestört durch die Ruhelage sich zurückbewegende Nadel möge bis zum Winkel  $\alpha_{2\nu+2}$  ausschlagen, so ist:

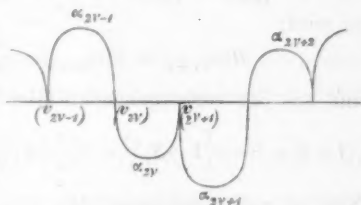
$$\alpha_{2\nu+2} = \alpha_{2\nu+1} \theta(\alpha_{2\nu+1}),$$

wenn  $\theta(\alpha_{2\nu+1})$  das Dämpfungsverhältniss für den Winkel  $\alpha_{2\nu+1}$  bedeutet. Durch eine der obigen analoge Gleichung sind  $v_0$  und  $v_{2\nu+1}$  bestimmt:

$$v_0 = n \alpha_1 e^{\frac{m}{\beta} \arctan \frac{\beta}{m}} (1 - S_3 \alpha_1^2),$$

$$v_{2\nu+1} = n \alpha_{2\nu} \theta(\alpha_{2\nu}) e^{\frac{m}{\beta} \arctan \frac{\beta}{m}} (1 - S_3 \alpha_{2\nu}^2 \theta(\alpha_{2\nu})^2).$$

Hier ist  $\alpha_1$  der erste,  $\alpha_{2\nu}$  der vor  $\alpha_{2\nu+1}$  vorhergehende Ausschlagswinkel, also  $\alpha_{2\nu} \theta(\alpha_{2\nu})$  der auf  $\alpha_{2\nu}$  folgende, wenn die Nadel ungestört geblieben wäre.



Die Einsetzung der beiden vorhergehenden Gleichungen und der folgenden:

$$\alpha_{2v} = \alpha_{2v-1} \theta(\alpha_{2v-1})$$

in (29) ergibt:

$$\alpha_1 (1 - S_3 \alpha_1^2) - \alpha_{2v-1} \theta(\alpha_{2v-1}) \{1 - S_3 \alpha_{2v-1}^2 \theta(\alpha_{2v-1})^2 \theta(\alpha_{2v-1})^2\} \\ = \alpha_{2v+1} (1 - S_3 \alpha_{2v+1}^2).$$

Sind nun nach einer genügenden Anzahl von Inductionsstößen die Ausschläge constant geworden, also:

$$\alpha_{2v+1} = \alpha_{2v-1} = \frac{a}{2}, \quad \alpha_{2v+2} = \alpha_{2v} = \frac{b}{2},$$

so wird:

$$\theta(\alpha_{2v+1}) = \theta(\alpha_{2v-1}) = \frac{b}{a} = \theta\left(\frac{a}{2}\right)$$

und aus der vorhergehenden Gleichung:

$$2\alpha_1 (1 - S_3 \alpha_1^2) = a \left[ 1 - S_3 \frac{a^2}{4} + \theta\left(\frac{b}{2}\right) \theta\left(\frac{a}{2}\right) \left(1 - S_3 \frac{a^2}{4} \theta\left(\frac{b}{2}\right)^2 \theta\left(\frac{a}{2}\right)^2\right) \right].$$

Nun ist nach Gleichung (24):

$$\lambda = \log \operatorname{nat} \frac{a}{b} = \frac{m\pi}{\beta} \left(1 - S_2 \frac{a^2}{4}\right)$$

und daher mit Vernachlässigung der höheren Potenzen:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\theta\left(\frac{a}{2}\right)} = e^{\frac{m\pi}{\beta}} \left(1 - \frac{m\pi}{\beta} S_2 \frac{a^2}{4}\right)$$

und analog:

$$\frac{1}{\theta\left(\frac{b}{2}\right)} = e^{\frac{m\pi}{\beta}} \left(1 - \frac{m\pi}{\beta} S_2 \frac{b^2}{4}\right)$$

oder nach Einsetzung des Werthes von:  $e^{\frac{m\pi}{\beta}}$  aus der vorigen Gleichung:

$$\frac{1}{\theta\left(\frac{b}{2}\right)} = \frac{a}{b} \left(1 + \frac{m\pi}{\beta} S_2 \frac{a^2 - b^2}{4}\right).$$

Hiernach erhält die Formel für  $\alpha_1$  die Gestalt:

$$2\alpha_1 (1 - S_3 \alpha_1^2) = a \left(1 - S_3 \frac{a^2}{4}\right) \\ + a \frac{b^2}{a^2} \left(1 - \frac{m\pi}{\beta} S_2 \frac{a^2 - b^2}{4}\right) \left(1 - S_3 \frac{a^2}{4} \frac{b^4}{a^4} \left\{1 - \frac{m\pi}{\beta} S_2 \frac{a^2 - b^2}{4}\right\}^2\right)$$

oder mit Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung  $a^4$  oder  $a^2 b^2$ :

$$(30) \quad 2\alpha_1(1 - S_3 \alpha_1^2) = a \left\{ 1 + \frac{b^2}{a^2} \left( 1 - A \frac{a^2 - b^2}{4} S_2 - \frac{b^2}{4} S_3 \right) - \frac{a^2}{4} S_3 \right\},$$

nachdem:

$$\frac{m\pi}{\beta} = A$$

gleich dem Decrement für unendlich kleine Bogen eingesetzt ist.

Die Formel (30) tritt also an die Stelle der sonst bei der Zurückwerfungsmethode angewandten:

$$2\alpha_1 = a \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right).$$

Die analoge, bei der Multiplicationsmethode anzuwendende genaue Formel lautet, wenn  $a$  den Grenzwert des Schwingungsbogen bezeichnet:

$$2\alpha_1(1 - S_3 \alpha_1^2) = a \left\{ 1 - e^{-A} - \frac{a^2}{4} \left( A e^{-A} S_3 - (e^{-3A} - 1) S_3 \right) \right\}.$$

In diese beiden Formeln kann für  $\alpha_1$  in  $S_3 \alpha_1^2$  der genäherte Werth, für welchen  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  Null sind, eingesetzt werden.

Sind nun  $v_1$  resp.  $v_2$  die bei der Induction um die horizontale resp. verticale Componente des Erdmagnetismus, dem Magneten ertheilten Anfangsgeschwindigkeiten und  $\alpha_1$  resp.  $\alpha_2$  die ersten Ausschlagswinkel, so ist:

$$v_1 = n\alpha_1 e^{\frac{m}{\beta} \arctg \frac{\beta}{m}} (1 - S_3 \alpha_1^2), \quad v_2 = n\alpha_2 e^{\frac{m}{\beta} \arctg \frac{\beta}{m}} (1 - S_3 \alpha_2^2),$$

andererseits ist bekanntlich:

$$v_1 = \frac{2F}{KW} \left( \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0} \cdot T; \quad v_2 = \frac{2F}{KW} \left( \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0} \cdot V,$$

wenn  $T$  die horizontale,  $V$  die verticale Componente der erdmagnetischen Kraft bedeutet,  $F$  die Fläche des Erdinductors. Daraus folgt:

$$(31) \quad \frac{V}{T} = \operatorname{tg} i = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{1 - S_3 \alpha_1^2}{1 - S_3 \alpha_2^2},$$

worin  $i$  die magnetische Inclination bezeichnet. Da nun  $S_3 \alpha_2^2 \geq S_3 \alpha_1^2$  ist, je nachdem  $V \geq T$ , so ersieht man, dass die Inclination ohne diese Correctionsgrößen zu gross resp. zu klein gefunden wird, wenn  $i$  grösser resp. kleiner als  $45^\circ$  ist.

Es mag noch besonders bemerkt werden, dass in den beiden ersten Gleichungen für  $v_1$  und  $v_2$  im Exponenten von  $e$  die absolute Constante  $\frac{m}{\beta}$ , nicht ursprünglich das vom Winkel abhängige  $\log$ . Decrement steht, wie man die Formel sonst angegeben findet. Aus dem Werthe für  $\operatorname{tg} i$  fällt daher die Exponentialfunction ganz heraus. Berücksichtigt man sie, so beruht dies auf der Annahme einer infolge von Temperaturänderung eingetretenen Aenderung des Widerstandes. Dann aber muss auch consequenter Weise  $W$  in den beiden Gleichungen für  $v_1$  und  $v_2$  verschieden angenommen, also in der Formel für  $\operatorname{tg} i$  müssen noch andere von den Decrementen abhängige Correctionsfactoren berücksichtigt werden.

Seien nun

$a, b$  die beiden Grenzwerte des Schwingungsbogen  $\alpha_1$  und des darauf folgenden; analog

$A, B$  die Grenzwerte von  $\alpha_2$  und des folgenden, so erhält mit Hülfe von (30) die Gleichung (31) die Form:

$$\operatorname{tg} i = \frac{A}{a} \cdot \frac{1 + \frac{B^2}{A^2} \left( 1 - A \frac{A^2 - B^2}{4} S_2 - \frac{B^2}{4} S_3 \right) - \frac{A^2}{4} S_3}{1 + \frac{b^2}{a^2} \left( 1 - A \frac{a^2 - b^2}{4} S_2 - \frac{b^2}{4} S_3 \right) - \frac{a^2}{4} S_3}$$

$$(32) \left\{ \operatorname{tg} i = \frac{A}{a} \cdot \frac{1 + \frac{B^2}{A^2} \left[ 1 - \frac{A}{4} S_2 \left( B^2 \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} - b^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right) \right]}{1 + \frac{b^2}{a^2} \left[ -\frac{S_2}{4} \left( \frac{B^4}{A^2 + B^2} - \frac{b^4}{a^2 + b^2} \right) - \frac{S_3}{4} (A^2 - a^2) \right]} \right\}.$$

Bei einer am 2. Sept. 1877 angestellten Inclinationsbestimmung mit dem Multiplicator II und dem Erdinductor ergaben sich folgende auf Bogen reducirte Grenzwerte der Schwingungsbogen in Scalentheilen:

$$\begin{aligned} a \cdot 2r &= 264,98, & A \cdot 2r &= 613,07, \\ b \cdot 2r &= 148,34, & B \cdot 2r &= 344,41, \\ & & r &= 4120. \end{aligned}$$

Aus den beiden Werthen des Decrements:

$$\log \frac{a}{b} = 0,25196 = \lambda(a) \cdot \log e; \quad \log \frac{A}{B} = 0,25044 = \lambda(A) \log e,$$

wo  $a$ ,  $A$  als Argumente zu  $\lambda$  hinzugefügt sind, ergibt sich mit Hülfe der Gleichungen:

$$\lambda(a) = A(1 - S_2 a^2); \quad \lambda(A) = A(1 - S_2 A^2),$$

das Decrement  $A$  für unendlich kleine Bogen:

$$A \log e = 0,25231.$$

Die Correctionsgrösse  $S_2$  aus diesen Beobachtungen zu berechnen, erscheint nicht zweckmässig, da hier der Einfluss der Beobachtungsfehler zu gross ist. Da aber  $M_1$  für den Multiplicator  $\Pi$  uns jetzt bekannt ist, so ergeben uns die Gleichungen auf p. 472 nach Einsetzen von  $A$  die Werthe:

$$S_2 = 3,5848, \quad S_3 = 1,1543,$$

und es wird aus der Formel (32):

$$\operatorname{tg} i = \frac{A}{a} \frac{1 + \frac{B^2}{A^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2}} (1 - 0,000\,3841 - 0,000\,0984 - 0,001\,2958),$$

$$i = 66^\circ 37' 23''.$$

Wendet man dagegen die gebräuchliche Formel an:

$$\operatorname{tg} i' = \frac{A}{a} \frac{1 + \frac{B^2}{A^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2}}, \quad \text{so folgt: } i' = 66^\circ 39' 36''.$$

Die Correction beträgt also hier:

$$i - i' = -2' 13''.$$

Die Grösse:

$$1 - \frac{S_2}{4} (A^2 - a^2) = 1 - 0,001\,2958$$

ist die Correctionsgrösse der Formel (31), wenn die Differenzen  $(a_2 - A)$ ,  $(a_1 - a)$  vernachlässigt werden (sie betragen infolge der starken Dämpfung nur ungefähr 50 Scalentheile). Jene Correctionsgrösse hat einen Werth von  $1' 37''$ .

Aus Gleichung (32) ist ferner noch ersichtlich, dass in derselben zu dem Quotienten  $\frac{A}{a}$  eine positive und eine negative Grösse hinzugefügt wird; es kann also der Fall eintreten, dass dieselben Null sind und:

$$\operatorname{tg} i'' = \frac{A}{a}$$

den richtigen Werth darstellt; in der That ergibt sich in unserem Falle:

$$i'' = 66^{\circ} 37' 31''.$$

Man kann daher die Regel aussprechen:

So lange nicht für den Multiplicator die Corrections-constanten  $S_2$  und  $S_3$  bekannt sind, erhält man einen dem wahren Werthe der Inclination am nächsten kommenden, wenn man die Tangente der Inclination gleich dem Quotienten aus den beiden bei der Rückwerfungsmethode erhaltenen grösseren Schwingungsbogen setzt.

Es könnte hier der Einwand erhoben werden, dass die streng durchgeführte Voraussetzung eines vom Winkel unabhängigen Decrements, von welcher man ursprünglich bei der Integration der Differentialgleichung ausgegangen ist, und nach welcher  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{A}{B}$  gleich sein sollte, gerade die Formel:

$$\operatorname{tg} i'' = \frac{A}{a}$$

fordern würde. Dagegen lässt sich erwidern, dass der Beobachter, der z. B. solche Differenzen zwischen  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{A}{B}$  constant findet, wie auf p. 478 angegeben sind, es naturgemäss für eine grössere Annäherung halten wird, diese Differenzen, schon aus dem Grunde, um etwaige Widerstandsänderungen zu berücksichtigen, auch in der Berechnung zur Geltung kommen zu lassen, also die Formel:

$$\operatorname{tg} i'' = \frac{A}{a} \frac{1 + \frac{B^2}{A^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2}}.$$

anzuwenden.<sup>1)</sup> Erst jetzt nach Ableitung der allgemeinen Theorie erweist sich diese Ansicht mit Bestimmtheit als unzutreffend.

Zur Controle für den Werth der oben berechneten Correction von  $2' 13''$  können die Beobachtungen dienen, welche im Jahre 1877 gleichzeitig angestellt wurden, einerseits mit dem oben erwähnten Erdinductor (mittlerer

1) H. Wild, a. a. O. Mém. de l'acad. roy. de St. Pétersbourg 1878.

Radius der Windungen = 445 mm) und dem Multiplicator II, andererseits mit einem kleinen Erdinductor von Dr. Meyerstein (mittlerer Radius = 73 mm) und einem Galvanometer, dessen Multiplicator (im Folgenden mit III bezeichnet) mit eng elliptischen Windungen den Magnet umschliessend, jedenfalls den Multiplicator I noch in Rücksicht auf die Constanz der Dämpfung übertrifft, sodass für ihn die Correction derselben auf unendlich kleine Schwingungen vernachlässigt werden kann. Die Instrumente waren im magnetischen Observatorium aufgestellt. Die Werthe der Inclination, berechnet aus den Beobachtungen am Multiplicator II waren immer die grösseren, und zwar betrug die Differenz im Mittel aus neun Beobachtungen

am: Aug. 28., Septbr. 2., 3. 1877  
+ 4' 25".

Dann wurde am 6. Septbr. der Multiplicator III mit dem kleinen Erdinductor auf einer in der Nähe der Stadt gelegenen Anhöhe unter einem Zelte aufgestellt, um etwaige Localeinflüsse zu vermeiden, während der Multiplicator II an seinem Platze im magnetischen Observatorium blieb. Aus gleichzeitigen Beobachtungen ergab sich wieder für den Multiplicator II immer eine positive Differenz, und zwar im Mittel aus sieben Bestimmungen von:

+ 3' 6".

Mit Berücksichtigung der jetzt nach den obigen Ableitungen bekannten Correctionen, infolge der Abhängigkeit des Decrements vom Ausschlagswinkel, im Betrage von

- 2' 13"

bleibt zwischen den Beobachtungen mit den beiden Instrumenten noch ein Unterschied im Mittel von + 1' 32", und die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Differenzen dividirt durch die Anzahl (16) aller Bestimmungen reducirt sich von + 4' 1" auf 2' 5".

Es ist also durch diese Correction die mittlere Abweichung der mit zwei verschiedenen Instrumenten erhaltenen Werthe, von einer Grösse, die mit ziemlicher Sicherheit vorhergehen liess, dass sie eine in den Instrumenten

oder in der Theorie liegende Ursache besitze, auf einen Werth zurückgeführt, der innerhalb der Grenzen desjenigen Beobachtungsfehlers liegt, welchen W. Weber<sup>1)</sup> für eine Inclinationsbestimmung nach dieser Methode auf 2' 20" angibt, wenn nicht die gleichzeitigen Variationsbeobachtungen in Rechnung gezogen werden. Es spricht die Wahrscheinlichkeit also nicht dafür, dass die noch bleibende Differenz einen sächlichen Grund habe. Ausserdem mag noch hinzugefügt werden, dass die Grösse  $M_1$ , mit der die Correction von 2' 13" berechnet ist, wahrscheinlich bei den Beobachtungen 1877 grösser gewesen ist, infolge einer damals nicht so genau ausführbaren Centrirung des Multiplicators, wie es jetzt möglich ist. Der Werth von  $M_1$  und die daraus berechnete Correction von - 2' 13" kann daher, wenn der Multiplicator nicht centriert war, nur als die möglichst kleinste angesehen werden.

Göttingen, Juni 1879.

Nachtrag. Nach einer längern Abwesenheit zurückgekehrt, erhielt ich vor 14 Tagen Kenntniss von einer inzwischen übersandten Abhandlung von Hrn. O. Chwolson: Ueber die Dämpfung von Schwingungen bei grösseren Amplituden. *Mém. de l'Acad. Imp. des Sciences de St. Pétersbourg.* 26. Nr. 14. Ausgegeben August 1879. Diese Abhandlung hat die theoretischen Untersuchungen, welche in der zweiten Hälfte meiner obigen Arbeit (die im Juni, also zu einer Zeit, als ich von der Arbeit von Chwolson noch keine Kenntniss erhalten haben konnte, vollendet war) ebenfalls zum Gegenstande. Jedoch gibt Hr. Chwolson dem Integrale der untersuchten Differentialgleichung eine wesentlich andere Gestalt, und die nach allgemeineren Sätzen über eine Gleichung:

$$\frac{dd\varphi}{dt^2} + 2m \frac{d\varphi}{dt} + n^2 \varphi = V(\varphi, t)$$

1) Weber, *Abh. d. k. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen.* 5. p. 18. 1853.



schliesslich von ihm mitgetheilten Formeln (p. 31, 32, l. c.) für die Schwingungsdauer, Dämpfung etc. setzen die specielle Gleichung:

$$\frac{dd\varphi}{dt^2} + 2m(1 - \varphi^2) \frac{d\varphi}{dt} + n^2 \varphi (1 - \frac{1}{2} \varphi^2) = 0$$

voraus, welche also in der oben von mir untersuchten:

$$\frac{dd\varphi}{dt^2} + 2m(1 - m_1 \varphi^2) \frac{d\varphi}{dt} + n^2 \varphi (1 - n_1 \varphi^2) = 0$$

enthalten ist. Die erwähnten Formeln (p. 31, 32, l. c.) ergeben sich daher, wenn man in die oben mitgetheilten (19), (24), (28)  $m_1 = 1$   $n_1 = \frac{1}{2}$  setzt. Die aus Beobachtungen oben p. 473 vollständig berechneten Werthe von  $m_1$  für zwei Galvanometer lehren aber, dass  $m_1$  meistens von dem Werthe 1 weit entfernt sein wird.

Göttingen, 8. October 1879.

## VI. Ueber ultraviolette Strahlen; von J. L. Schön.

Im Folgenden erlaube ich mir, eine Methode anzugeben, ultraviolettes, prismatisch zerlegtes Licht in der Weise sichtbar zu machen, dass genaue Messungen vorgenommen werden können. Der in Anwendung gekommene Spectralapparat wurde von Adam Hilger in London nach meinen Angaben construirt. Er besteht aus einem sich nach beiden Seiten öffnenden Iridiumspalt, dessen Oeffnungsweite an einer Theilung abgelesen werden kann. Vor dem Spalte befindet sich ein Schlitten, in den eine das Licht auf den Spalt condensirende Cylinderlinse oder sphärische Linse aus Bergkrystall von drei und zwei Zoll (englisch) Brennweite, die ich bei dieser Arbeit jedoch nicht angewandt habe, geschoben werden kann. Ausserdem lässt sich ein Vergleichungsprisma aus Bergkrystall ebenfalls in einem Schlitten vorschieben. Die Collimatorlinse, ebenfalls aus Bergkrystall, wie alle Linsen und Prismen, wenn nichts

anderes bemerkt wird, hat 1 Fuss  $9\frac{5}{8}$  Zoll (englisch) Brennweite und  $1\frac{5}{8}$  Zoll Durchmesser. In einen Schlitten vor der Collimatorlinse kann ein rechtwinkliges Bergkrystallprisma geschoben werden, dessen Winkel  $60^\circ$  und  $30^\circ$  betragen. Die längere Kathete läuft der Collimatorlinse parallel. Es ist so geschliffen, dass die optische Axe parallel der kürzern Kathete verläuft. Die Lichtstrahlen fallen also sämmtlich senkrecht auf die eine Kathetenfläche und parallel der optischen Axe ein, werden also erstens einfach gebrochen und im Minimum der Ablenkung heraustreten. Bei den meisten der bisher von mir gemachten Beobachtungen wandte ich nur dies eine rechtwinklige Prisma an, um die ultravioletten Strahlen möglichst lichtstark zu erhalten, da die Dispersion dann gering ist. — Vor der Objectivlinse des Fernrohrs, die 1 Fuss  $6\frac{3}{8}$  Zoll (englisch) Brennweite und  $1\frac{5}{8}$  Zoll Durchmesser hat, befindet sich gleichfalls ein Schlitten, in dem ein dem ersten Prisma congruentes symmetrisch zum ersten angebracht werden kann. Die Hypotenuse der Prismen misst zwei englische Zoll. Durch eine sich beim Drehen des Fernrohrs zusammenschiebende Kapsel sind Collimatorlinse, Fernrohrobjectiv und beide Prismen vor allem fremden Lichte geschützt. Wenn man nun beide Prismen anwendet, und wenn sich eine Linie mit dem Faden oder der leuchtenden Linie des Oculars deckt, so sind die Strahlen, welche diese Linie bilden, durch das zweite Prisma parallel der kürzern Kathete, also parallel der optischen Axe gegangen, werden also gleichfalls im zweiten Prisma einfach gebrochen und befinden sich im Minimum der Ablenkung. Man hat demzufolge zum Zwecke der Messungen nur aufs Fadenkreuz einzustellen, während die beiden Prismen unverändert am Spaltrohr und am Fernrohre bleiben. Die Dispersion ist bei zwei Prismen natürlich doppelt so gross wie bei einem und gleich der Dispersion eines gleichseitigen Prismas. — Das Spaltrohr ist fest mit der Theilscheibe verbunden, das Fernrohr dagegen mittelst Mikrometerschraube verstellbar; an der Theilscheibe sind zwei No-

nien mi  
bar um  
Spectra  
tung ha  
bei der  
der Be  
ohne A  
scheide  
Ausser  
Statifs  
den, wi  
gestatte

Da  
bei der  
eingesc  
Uranagl  
geneigt  
nicht.  
platte  
Flusssp  
dagege  
in der  
und zu  
runde  
geträn  
dem F  
Ocular  
Linie  
auch g  
werden  
schneid  
deren  
reicht,  
des Fe  
sehr s  
Oeffnu  
kleiner

nien mit Lupen. Die Theilscheibe selbst steht vertical, drehbar um eine horizontale und um eine verticale Axe. Die Spectrallinien liegen demnach horizontal. Diese Einrichtung habe ich aus zwei Gründen getroffen. Einmal ist es bei der Beobachtung des Sonnenspectrums bei dieser Art der Bewegung leicht, der Sonne in ihrem Laufe zu folgen, ohne Anwendung eines Heliostaten, und zweitens unterscheide ich horizontale Linien viel besser als senkrechte. Ausserdem kann aber auch nach der Einrichtung des Statifs die Theilscheibe in horizontale Lage gebracht werden, während sie dann nur Drehung um eine verticale Axe gestattet.

Das fluorescirende Ocular, eine Copie des Soret'schen, bei dem also auf der zwischen zwei Bergkrystallplatten eingeschalteten fluorescirenden Flüssigkeit oder auf einer Uranglasplatte das Spectrum aufgefangen und durch das geneigte Ramsden'sche Ocular betrachtet wird, genügte mir nicht. Die fluorescirende Flüssigkeit oder die Uranglasplatte wurden in ganz diffuser Weise erleuchtet; auch eine Flussspathplatte leistete nichts. Vorzüglich bewährte sich dagegen folgende Einrichtung, ohne die ich überhaupt nicht in der Lage gewesen wäre, ultraviolette Linien zu sehen und zu messen. In eine kleine Zelle brachte ich eine runde Scheibe aus sehr feinem, mit schwefelsaurem Chinin getränkten Pauspapier. Diese Zelle bringt man dicht vor dem Ramsden'schen Ocular in der Weise an, dass das Ocular zugleich auf die Scheibe und auf eine leuchtende Linie eingestellt werden kann. Die leuchtende Linie, die auch gleichfalls als dunkle Linie für die Messungen benutzt werden kann, hat folgende Einrichtung. Eine Iridiumschneide, deren Rücken dem Beobachter zugekehrt ist, und deren Ende genau bis in die Mitte des Gesichtsfeldes reicht, ist am Ende so abgeschliffen, dass ein auf der Axe des Fernrohrs fast senkrecht stehendes, gleichschenkliges, sehr schmales Dreieck entsteht, das durch eine kleine Oeffnung in der Seitenwand des Oculars Licht von einem kleinen ausserhalb am Ocular angebrachten, mit Universal-

bewegung versehenen Spiegel erhält. Die Axe des Oculars wird nicht wie bei Soret geneigt, sondern fällt wie gewöhnlich mit der Axe des Fernrohrs zusammen. Der für gewöhnlich sichtbare Theil des Spectrums, den man ja ohne Chininpapierscheibe untersuchen wird, ist natürlich viel weniger deutlich; dagegen das ultraviolette Spectrum sehr schön; denn es handelt sich hier ja nicht um ein Durchlassen von Licht, sondern alle von der wirksamen ultravioletten Linie getroffenen Theilchen des Papiers leuchten ja selbständig in der ganzen Dicke des Papiers; dabei verbreitet sich dies Licht in dem Papier durchaus nicht in der diffusen Weise wie in einer fluorescirenden Flüssigkeit oder in der Uranglasplatte. Nur eine zart mattgeschliffene Uranglasplatte leistete einigermaßen annähernd dasselbe. — Wie man aus dem folgenden sehen kann, fluorescirt Chininpapier noch in Lichtstrahlen, die etwa um die sechsfache Länge des gewöhnlichen Spectrums von *H* abstehen.

Zunächst beobachtete ich die ultravioletten Spectren von Cadmium, Zink, Thallium, die wie die folgenden erhalten wurden, indem die betreffenden Metalle, nach Einschaltung einer Leydener Flasche, als Pole eines Ruhmkorff'schen Inductionsapparats dienten, und fand gute Uebereinstimmung mit den Miller'schen Photographien, wie sie Lockyer in seinen Studien zur Spectralanalyse reproducirt hat. Die äussersten Zinklinien, die bei 170 und 180 der Miller'schen Scala nur äusserst schwach angedeutet sind, erweisen sich nach meiner Beobachtung als ebenso intensiv wie etwa die Zinklinien bei 140. Dass diese äussersten Linien so schwach in der Photographie erscheinen, rührt jedenfalls daher, dass der Apparat auf die ersten Linien und nicht auf diese genau eingestellt war. Da die Bergkrystallinsen nur aus einem Stoffe bestehen, so können sie nicht achromatisch sein, und ist deshalb eine genaue Einstellung auf jede Linie erforderlich, was selbstverständlich bei meiner Methode leicht, dagegen beim Photographiren schwierig ist. Um diese Einstellungen

zu er  
Fernr  
achrom  
constr  
kleine  
Ausde  
liessen  
violett  
spath  
bereit  
für ei  
gleich  
habe  
gleich  
selbe  
befest  
Prism  
aller  
violett  
Disp  
linien  
violett  
Sonn  
nach  
den  
Einf  
Disp  
zuge  
Fall  
Es  
Dop  
sich  
Bez  
sind  
zu  
die

zu erleichtern sind die Auszüge des Spaltrohrs und des Fernrohrs mit Theilungen versehen. — Wollte man auch achromatische Linsen etwa aus Bergkrystall und Kalkspath construiren, so würde die Achromasie doch nur für einen kleinen Bereich herzustellen sein, wenn man an die grosse Ausdehnung des ultravioletten Spectrums denkt. Dagegen liessen sich sehr wohl geradsichtige Spectroskope für ultraviolettes Licht aus zwei Bergkrystall- und einem Kalkspathprisma construiren, und habe ich Hrn. Adam Hilger bereits die Winkel und die Richtung der optischen Axen für eine zweckmässige Combination angegeben. — Wenn gleich die rechtwinkligen Prismen sehr bequem sind, so habe ich ferner eine Einrichtung zur Einschaltung eines gleichseitigen Kalkspathprismas anfertigen lassen. Dasselbe lässt sich vermittelst des Schlittens am Spaltrohre befestigen und ist drehbar. Natürlich muss man dies Prisma stets fürs Minimum der Ablenkung einstellen, was allerdings die Untersuchung erschwert. Nur beim ultravioletten Calciumspectrum habe ich es wegen der grössern Dispersion angewendet und will die ultravioletten Calciumlinien zunächst genauer discutiren, weil die erste ultraviolette Doppellinie noch in den Bereich des ultravioletten Sonnenspectrums fällt. Die Lage der Linien bestimme ich nach Graden, Minuten und Secunden desjenigen Winkels, den der aus dem Prisma austretende Lichtstrahl mit dem Einfallslothe bildet; weil einmal dadurch die angewandte Dispersion ersichtlich ist, dann aber auch der betreffende zugehörige Brechungsexponent für Bergkrystall, in diesem Falle auch für Kalkspath leicht erhalten werden kann.

Das ultraviolette Calciumspectrum ist sehr einfach. Es besteht aus zwei Doppellinien. Die erste ultraviolette Doppellinie lässt einen grössern Zwischenraum zwischen sich als die zweite. Die zweite Doppellinie gleicht in dieser Beziehung fast den Linien bei *H*. Die beiden Doppellinien sind sehr intensiv und im mässig dunkeln Zimmer bei Tage zu beobachten. Die Winkel mit dem Einfallslothe und die Brechungsexponenten sind folgende:

Rothe Li-Linie	$= 55^{\circ} 46' 45''$	Brechungsexpon. für Kalkspath	$= 1,65375$
Na-Linie	$= 56^{\circ} 1' 25''$	" "	$= 1,65854$
[Nach Mascart D = 1,65846]			
I. Ca-Doppellinie $\alpha$	$= 58^{\circ} 56' 30''$	Brechungsexpon. für Kalkspath	$= 1,71328$
Ca-Doppellinie $\beta$	$= 59^{\circ} 1' -$	" "	$= 1,71463$
II. Ca-Doppellinie $\alpha$	$= 60^{\circ} 17' 45''$	" "	$= 1,73719$
Ca-Doppellinie $\beta$	$= 60^{\circ} 21' -$	" "	$= 1,73813$

Hiernach würde die erste ultraviolette Doppellinie des Calcium zwischen den Sonnenlinien *R* und *S* liegen, wenn man Mascart's Messungen der ultravioletten Fraunhofer'schen Linien zu Grunde legt.<sup>1)</sup> Bei der Wichtigkeit des Elements habe ich die Linien auch mit einem Bergkrystallprisma beobachtet und gemessen. Die erste Doppellinie erscheint auch dann doppelt, die zweite jedoch wegen der geringern Dispersion als einfache breite Linie. Die Winkel und Brechungsexponenten für Bergkrystall sind folgende:

Na-Linie	$= 50^{\circ} 33' -$
Brechungsexponent für Bergkrystall	$= 1,5444$
[Nach Esselbach D = 1,5446]	
Mitte der ersten Doppellinie	$= 51^{\circ} 50' -$
Brechungsexponent für Bergkrystall	$= 1,5724$
Mitte der zweiten Doppellinie	$= 52^{\circ} 24' 30''$
Brechungsexponent für Bergkrystall	$= 1,5847$

Vergleicht man dies mit Esselbach's Messungen der ultravioletten Fraunhofer'schen Linien, so würde die erste ultraviolette Calciumdoppellinie zwischen *Q* und *R* liegen.

Als zweites Metall wählte ich Indium, für welches die Winkel folgende sind:

Rothe Li-Linie	$= 50' 26' -$
Na-Linie	$= 50' 33' -$
Ultrav. Indiumspectrum 1)	$= 51^{\circ} 47' 30''$ starke Linie
2)	$= 52^{\circ} 3' -$

1) Angeführt in Mousson's Physik, Optik p. 494.

- Ultrav. Indiumspectrum 3) =  $52^{\circ} 5' 30''$   
 4) =  $52^{\circ} 8' 30''$   
 5) =  $52^{\circ} 12' 30''$  starke Linie.  
 6) =  $53^{\circ} 52' 30''$  starke Linie.  
 7) =  $55^{\circ} 8' 30''$  Mitte einer breiten,  
 starken Linie.  
 8) =  $55^{\circ} 57' 30''$  Mitte einer breiten  
 Linie.

Einem vollständig andern Charakter als das Indium-spectrum hat das Manganspectrum. Während das erstere aus weiter voneinander abstehenden Linien besteht, ist das letztere weit complicirter. Zunächst fallen zwei einander nahestehende starke Linien auf; dann folgen drei feinere Linien, von denen die dritte stärker ist als die beiden ersteren; dann kommen wieder zwei starke Linien, die einen grössern Abstand voneinander haben als das erste Paar starker Linien. Darauf folgen drei Gruppen von Linien. Die erste und zweite dieser Gruppen bestehen je aus etwa vier Linien; die dritte, sehr charakteristische Gruppe besteht aus mindestens acht Linien, von denen die ersten am hellsten sind, und deren Intensität sich allmählich abstuft. Dann kommen zwei feine Linien, und dann wieder drei oder vier Gruppen sehr feiner Linien. Die dritte und vierte dieser Gruppen gehen ineinander über. Die beifolgende Zeichnung (Taf. II Fig. 6) mag diesen Ueberblick erläutern.

Ob einige der Linien von Verunreinigungen durch Eisen, Kohle herrühren, wird sich später nach sorgfältiger Vergleichung der verschiedenen Spectren ergeben. Die gemessenen Winkel sind folgende:

Rothe Li-Linie =  $50^{\circ} 26'$ ,

Na-Linie =  $50^{\circ} 33'$ ,

- |   |                               |
|---|-------------------------------|
| 1) = $51^{\circ} 24'$ , matte Linie,    |                               |
| 2) = $51^{\circ} 31'$ starke Linie      | } auffallendes<br>Linienpaar, |
| 3) = $51^{\circ} 34'$ starke Linie      |                               |
| 4) = $51^{\circ} 37'$ sehr feine Linie, |                               |





- 5) von  $54^{\circ} 48'$  } Gruppe feiner Linien,  
     bis  $55^{\circ} 3'$  }  
 6) =  $55^{\circ} 36'$  Mitte einer schmalen Gruppe,  
 7) =  $56^{\circ} 23'$  Ende des Eisenspectrums.

Das Aluminiumspectrum hat im allgemeinen den Charakter des Mangan- und Eisenspectrums, jedoch sind die Liniengruppen nicht in gleichem Maasse zusammengedrängt wie in einem Theile des Eisenspectrums. Im Anfange des ultravioletten Spectrums wechseln wenige feinere Linien mit sehr starken Linienpaaren ab. Darauf folgen Liniengruppen, die sich beinahe so weit wie beim Eisen erstrecken. Die vier letzten, fast äquidistanten Gruppen, deren erste am lichtstärksten ist, sind besonders charakteristisch und bestehen aus deutlichen Linien. Die Ablesungen sind folgende:

- 1) =  $51^{\circ} 26'$  helle, feine Linie,  
 2) =  $51^{\circ} 38'$  starke Linie } auffallendes Linienpaar,  
 3) =  $51^{\circ} 44'$  starke Linie }  
 4) =  $51^{\circ} 49'$  feine Linie,  
 5) =  $51^{\circ} 56'$  starke Linie } auffallendes Linienpaar,  
 6) =  $52^{\circ} 0'$  starke Linie }  
 7) =  $52^{\circ} 20'$  Liniengruppe,  
 8) =  $52^{\circ} 47'$  Mitte einer etwas breiten Gruppe,  
 9) =  $53^{\circ} 10'$  Gruppe mit deutlichen Linien,  
 10) =  $53^{\circ} 24'$  Linie,  
 11) =  $53^{\circ} 33'$  drei Linien dicht nebeneinander,  
 12) =  $53^{\circ} 46'$  eine feine Linie,  
 13) =  $53^{\circ} 57'$  bis  $54^{\circ} 17'$  eine stärkere Linie mit sich anschliessender Gruppe,  
 14) =  $54^{\circ} 33'$  schmale Gruppe,  
 15) von  $54^{\circ} 42'$  bis  $55^{\circ} 2'$  breite Gruppe,  
 16) =  $55^{\circ} 42'$  Anfang der ersten hellen Endgruppe,  
 17) =  $56^{\circ} 17'$  Anfang der zweiten Endgruppe,  
 18) =  $56^{\circ} 41'$  Anfang der dritten Endgruppe,  
 19) =  $57^{\circ} 11'$  Anfang der vierten Endgruppe des Aluminiumspectrum.

Absorptionserscheinungen im ultravioletten Theile des Spectrums lassen sich nach dieser Methode direct leicht beobachten. Eine Wasserschicht von 10 cm, zwischen zwei Bergkrystallplatten in eine Glasröhre eingeschlossen und zwischen Lichtquelle und Spalt eingeschaltet, absorbirte einen grossen Theil des ultravioletten Spectrums und liess das letztere nur etwa bis zur Grenze des ultravioletten Sonnenspectrums durch. Dagegen liess ein sehr klarer Eisblock von 21 cm, der durch Schleifen an zwei Enden mit parallelen Ebenen versehen war, alle Cadmiumlinien, die sich doch weit ins Ultraviolette erstrecken, ohne bemerkbare Schwächung durch. Jedoch sind diese Versuche nur vorläufige. Das Verhalten des reinen Wassers ist bemerkenswerth für meteorologische Fragen und ausserdem bei Untersuchungen über Absorptionserscheinungen wässriger Lösungen in Anschlag zu bringen.

## VII. *Ueber ein Spectroteleskop; von P. Glan.*

Ich gebe hiermit einige Versuche, ein Fernrohr herzustellen, das gestattet, die betrachteten Gegenstände in jeder homogenen Farbe zu sehen, die sie aussenden. Der Nutzen eines solchen Apparates ist mannichfaltig für Physik und Astrophysik. Wir besitzen in der Optik mehrfach Methoden, die für weisses oder monochromatisches Licht farbiger Flammen gut ausgearbeitet sind, die aber zur Beobachtung im beliebigen homogenen Lichte die Herstellung desselben in besonderen Apparaten bedürfen, Zusammenstellungen, die die Einfachheit der Versuchsanordnung beeinträchtigen. Da ist es denn von Vortheil, einen Apparat zu besitzen, der sich an Stelle des Fernrohrs anbringen lässt und ohne weiteres ermöglicht, die untersuchte Erscheinung im beliebigen homogenen Lichte zu sehen. Und die Astrophysik strebt fortdauernd dar-

nach, grössere Theile der Sonne im homogenen Lichte auf einmal im Gesichtsfelde übersehen zu können. Schnelle Veränderungen lassen sich dann besser verfolgen, und ein erleichtertes Studium der Gestirne in ihrer unveränderten Gestalt im homogenen Lichte verspricht weitere Kenntniss ihrer chemischen und physikalischen Beschaffenheit. Auch sei hervorgehoben, dass in der Herstellung eines Fernrohrs, das von dem vielfarbigen, zu ihm kommenden Lichte nur eine Farbe zum Auge gelangen lässt, die Möglichkeit gegeben ist, Bilder zu erhalten, die von den Fehlern der chromatischen Aberration frei sind. Endlich ist für mikroskopische Untersuchungen, bei denen sich die Construction gleichfalls verwerthen lässt, eine leichte Betrachtung der Gegenstände in verschiedenen Farben von Nutzen, und so ist der Versuch zur Herstellung eines solchen Apparates hinreichend gerechtfertigt.

Ein erster Schritt, Bilder der Gegenstände in homogenem Lichte zu erhalten, war es, Bilder von ihnen auf dem Spalte eines Spectralapparates zu entwerfen; so studirte man die Umgebung der Sonne, Abschnitt für Abschnitt, denn nur kleine Theile liessen sich auf einmal übersehen. Um grössere Theile der Sonne auf einmal im homogenen Lichte übersehen zu können, hat Zöllner den Spalt erweitert oder ihn in schnelle, hin und her schwingende Bewegung versetzt. So gewinnt man einiges. Die Erweiterung des Spaltes hat indess ihre Grenzen; mit zunehmender Breite wächst die Helligkeit des Spectrums der erleuchteten Luft, während die der einfarbigen Protuberanzen ungeändert bleibt, und bald heben sie sich nicht mehr sichtbar von dem hellen Spectrum der erleuchteten Luft ab. Ein weiterer Uebelstand dieser Methode ist ferner, dass sie nur von einfarbiges Licht aussendenden Gegenständen unverzerrte Bilder gibt. Gemischtes Licht aussendende Objecte erscheinen durch die Dispersion der Prismen in der Richtung der Länge des Spectrums verbreitert und verzerrt. Einen andern Weg haben Christiansen und Zenker eingeschlagen. Beide ent-

werfen ein Bild der zu betrachtenden Gegenstände nicht auf den Spalt eines Spectralapparates, sondern vor oder hinter denselben. Dort, wo vom ersten Spalte im Beobachtungsfernrohre ein Spectrum entworfen wird, ist eine Blendung mit spaltförmigem Ausschnitte angebracht, die nur einen kleinen, nahezu aus homogenem Lichte bestehenden Theil desselben hindurchgehen lässt. In der Farbe dieses Lichtes sieht man den betrachteten Gegenstand, von dem ein Bild vor oder hinter diesem zweiten Spalte im Beobachtungsfernrohre entsteht. Ein Punkt des Objects erscheint hierbei als eine kleine Linie parallel der Längsrichtung des Spectrums entsprechend der Breite des zweiten Spaltes. Das Gesichtsfeld wird vergrößert, aber die Helligkeit der Bilder nimmt auch beträchtlich ab, da von dem Lichte, das ein Punkt des Objects aussendet, ein grosser Theil durch den ersten Spalt aufgefangen wird. Zenker empfiehlt deshalb auch da, wo grössere Helligkeit wünschenswerth ist, die Methode von Zöllner. Da ferner von dem linearen Spectrum, das das Prisma des Apparates von einem Punkte des Objects entwirft, der zweite Spalt nicht einen Punkt, sondern eine kleine Linie übrig lässt, so sind die erhaltenen Bilder nicht scharf begrenzt, sondern vor allem die Begrenzungen parallel dem Spalte undeutlich und verwaschen und die feineren Einzelheiten der Bilder nicht zu erkennen. Endlich ist noch ein Vorschlag von Secchi zu erwähnen, der von Lockyer und Resphigi ausgeführt worden ist. Er empfiehlt ein stark dispergirendes Amici'sches Prismensystem mit gerader Durchsicht vors Ocular eines Fernrohrs zu halten, das auf den zu betrachtenden Gegenstand eingestellt ist. Gegenstände, die nur einige homogene Farben aussenden, wie die Protuberanzen, erscheinen dann bei hinreichend starker Dispersion des Prismensystems in einzelnen getrennten, einfarbigen Bildern. Doch bleibt diese Art der Beobachtung der Protuberanzen nur bei Finsternissen anwendbar, da sie sonst das Spectrum der erleuchteten Luft überdeckt. Eine rein theoretische Arbeit über denselben

Gegen  
stützt,  
lungen  
empfe  
mit se  
die er  
nung  
befind  
ander  
und C  
Aberr  
so, da  
die er  
währe  
stark  
eine s  
entste  
aus S  
Bildern  
erhebl  
des B  
kreise  
ihren  
je grö  
von d  
ist. I  
scher  
weiten  
mente  
viel ic  
man  
färbte  
die, w  
einigu  
muss.

1)  
p. 1. 1

Gegenstand, die sich auf wesentlich andere Principien stützt, veröffentlicht Hr. Prof. Lorenzoni<sup>1)</sup> in den Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Venedig. Er empfiehlt die Herstellung eines Sonnenbildes durch Linsen mit sehr starker chromatischer Aberration. Solche Linsen, die er hyperchromatische nennt, wären nach seiner Rechnung aus zwei biconvexen Crownglaslinsen und dazwischen befindlicher biconcaver Flintglaslinse zu erhalten. Auch andere Combinationen von je drei Linsen aus Flintglas und Crownglas sind zur Erlangung starker chromatischer Aberration zu benutzen. Er berechnet ihre Krümmungen so, dass parallele Strahlen einer gewissen Brechbarkeit, für die er die der Linie *C* wählt, unabgelenkt hindurchgehen, während die von anderer Wellenlänge mehr oder weniger stark convergent oder divergent austreten. Bringt man eine solche Linse vor das Objectiv eines Fernrohrs, so entsteht in der Brennweite des Objectivs ein Sonnenbild aus Strahlen von der Brechbarkeit der Linie *C*. Die Bilder aus Licht anderer Brechbarkeit fallen auf andere, erheblich abweichende Stellen und erzeugen an der Stelle des Bildes von der Brechbarkeit *C* grosse Zerstreungskreise, die sich über jenes Bild ausbreiten. Sie sind in ihren einzelnen Punkten von um so geringerer Helligkeit, je grösser sie sind, d. h. je weiter ihr Vereinigungspunkt von dem der Strahlen von der Brechbarkeit *C* entfernt ist. Durch Anwendung mehrerer solcher hyperchromatischer Linsen kann man den Unterschied der Vereinigungsweiten für verschiedene Farben steigern. Eine experimentelle Ausführung hat dieser theoretische Vorschlag, so viel ich weiss, nicht erfahren, und, so weit ich sehe, würde man auf diesem Wege auch nur mehr oder weniger gefärbte Bilder erhalten, deren scharfe Begrenzung durch die, wenn auch schnelle, doch stetige Aenderung der Vereinigungsweiten mit der Farbe Beeinträchtigungen erfahren muss.

1) Lorenzoni, Atti del R. Istituto veneto di scienze. 3. Ser. IV. p. 1. 1874.

Fassen wir das zunächst Wünschenswerthe in der Verbesserung der angewandten Methoden zusammen, so wäre es eine Vergrösserung des auf einmal übersehenen Gesichtsfeldes im einfarbigen Lichte ohne erhebliche Einbusse an Helligkeit. Die ersten Versuche, die ich in dieser Richtung anstellte, waren darauf gerichtet, einen grössern Theil der Sonne auf einmal im einfarbigen Lichte übersehen zu können. Hr. Prof. Förster hatte die Güte, mir die Benutzung der Apparate der königlichen Sternwarte zu gestatten, mit deren grossem Refractor und einem eigens für die Sternwarte construirten Spectralapparate von Schmidt und Haensch von sehr starker Dispersion ich die ersten Beobachtungen anstellte. Der Spectralapparat konnte nach Entfernung des Oculars an die Ocularröhre des grossen Refractors angeschraubt und mit ihr in dem Objectivrohre des Fernrohrs um etwa einen halben Meter verschoben werden. Eine Klemmschraube mit Mikrometerbewegung ermöglichte die Feststellung und feinere Einstellung; durch passend angebrachte Gegengewichte konnte das Fernrohr auch mit dieser neuen erheblichen Mehrbelastung äquilibrirt werden. Ich wählte für die ersten Versuche den grossen Refractor, weil ich mit ihm der Bewegung der Sonne am leichtesten folgen konnte, und das gewährte mir für die ersten Einstellungen eine wesentliche Erleichterung. Ich verfuhr folgendermassen. Ich brachte vor den Spalt des Spectralapparates, in einer Messinghülse verschiebbar, eine Linse von etwa 3 cm Brennweite an und zog das Ocularrohr des Fernrohrs, an das der Spectralapparat angeschraubt war, so weit aus, dass der Spalt etwa 13 cm von dem Sonnenbild der Objectivlinse entfernt war. Die Linse von kleiner Brennweite, die am besten achromatisch zu wählen ist, wurde in eine solche Entfernung vom Spalte gebracht, dass sie mehrere Millimeter hinter demselben ein verkleinertes Bild des von der Objectivlinse des Fernrohrs entworfenen Sonnenbildes von etwa 4 cm Durchmesser entwarf. Die Einschaltung dieser kleinen Linse vergrössert das durch den

Spectr  
jedem  
selben  
des B  
kleinen  
Object  
nun in  
angebr  
Theil  
trum,  
diese  
bleibt  
übrig.  
entspr  
Begre  
sonder  
ersten  
wasch  
unmit  
vex  
die B  
ihr en  
kleine  
recht  
wie d  
ist m  
schie  
an di  
Das  
eigen  
I  
Weis  
entfer  
gesch  
bild  
Dann  
die s

Ann

Spectralapparat hindurch übersehbare Gesichtsfeld. Von jedem Punkte des Objects entwerfen nun die Prismen desselben ein lineares Spectrum, das von der Objectivlinse des Beobachtungsfernrohrs im Innern desselben in verkleinertem Maasse wiedergegeben wird. Dort, wo diese Objectivlinse ein Spectrum des ersten Spaltes entwirft, ist nun im Beobachtungsfernrohr eine spaltförmige Blendung angebracht, die je nach ihrer Breite nur einen kleinen Theil desselben hindurch lässt. Von dem linearen Spectrum, das einem Objectivpunkte entspricht, und das hinter diese spaltförmige Blendung nach dem Ocular zu fällt, bleibt daher nur eine kleine Linie fast homogenen Lichtes übrig. Da indess jedem Objectpunkte eine kleine Linie entspricht, parallel der Länge des Spectrums, so sind die Begrenzungen der Objectbilder nicht vollkommen scharf, sondern vor allem die Begrenzungslinien parallel zum ersten Spalte durch diese kleinen Zerstreuungslinien verwaschen. Um diesen Mangel zu verringern, befestige ich unmittelbar hinter der Blendung eine einfache planconvexe Linse von 4—5 cm Brennweite. Durch sie werden die Bildpunkte brechbareren Lichtes in grösserer Nähe zu ihr erzeugt, sodass die einem Objectpunkte entsprechende kleine Linie bei der Beobachtung mit einem Ocular senkrecht zur Fernrohraxe verkürzt erscheint. Die Linse wirkt wie das Collectivglas eines Huyghens'schen Oculars. Sie ist mit dem eigentlichen Ocular, letzteres gegen sie verschiebbar, in einer Messingröhre vereinigt, die unmittelbar an die spaltförmige Blendung angeschraubt werden kann. Das von der Hülfslinse entworfene Bild wird mit dem eigentlichen Ocular nach Art des Ramsden'schen betrachtet.

Die Einstellung des Apparates geschieht in folgender Weise. Zunächst wird das Ocular des grossen Refractors entfernt, der Spectralapparat in gewöhnlicher Form angeschraubt, und der Spalt so eingestellt, dass das Sonnenbild des Objectivs scharf begrenzt auf ihm entworfen wird. Dann wird das Ocular des Beobachtungsfernrohrs auf die spaltförmige Blendung in ihm deutlich eingestellt und

beide zusammen so weit ausgezogen, dass man bei engem Spalte die Fraunhofer'schen Linien deutlich sah, zugleich mit den parallelen Rändern der Blendung und parallel zu ihnen. Dann wird der Spectralapparat abgenommen, die vorher beschriebene kleine Linse, um einige Millimeter weniger als ihre Brennweite vom Spalte entfernt, vor ihm eingeschaltet und das gewöhnliche Ocular durch das vorher beschriebene ersetzt. Es ist hierbei darauf zu achten, dass die Einstellungen des Spaltes und der spaltförmigen Blendung ungeändert bleiben, um die Reinheit der nicht abgeblendeten Farbe bei den späteren Beobachtungen zu bewahren. Nach diesen Vorbereitungen setzt man den Spectralapparat wieder ans Fernrohr, und zwar so, dass das Sonnenbild des Objectivs etwa 13 bis 14 cm vom Spalte entfernt ist. Das Ocular im Rohre vor der Blendung oder der gesammte Spectralapparat mit der Ocularröhre des grossen Refractors wird dann so weit ausgezogen, dass man den Sonnenrand scharf begrenzt sieht und zwar in der Farbe, die die Blendung des Beobachtungsfernrohrs hindurchlässt. Die Lage derselben im Spectrum kann an einem getheilten Kreise abgelesen werden, der die Drehungen des Beobachtungsfernrohrs angibt.

Nach einigen Vorversuchen an irdischen Objecten, die ich an einem Fernrohre mit kleinerer Brennweite und demselben Spectralapparate anstellte, gelangen mir folgende Sonnenbeobachtungen. Am 22. September 1878 sah ich bei der Beobachtung mit dem Spectralapparate und dem grossen Refractor bei Einstellung des Sonnenbildes auf den Spalt und Beobachtung mit dem Ocular in bekannter Weise über dem Spectrum des Sonnenrandes die hellen Wasserstofflinien und  $D_3$  sehr deutlich. Bei Beobachtung nach der vorher beschriebenen Methode sah ich einen Theil des Sonnenrandes in schneller, züngelnder Bewegung und zwar in allen Farben. Während der Beobachtung überzog sich der Himmel mit Wolken, sodass ich die Beobachtungen abbrechen musste. Am 27. September sah ich, als ich in der üblichen Weise beobachtete, die

helle  
mein  
und  
unter  
Bew  
wölk  
die h  
und  
beide  
tung  
para

einm  
Zehn  
Bren  
gross  
einen  
sehen  
rand  
entd  
die I  
Son

nun  
chem  
nur  
Astr  
Ein  
den  
hüll  
eine  
Son  
haft  
leich  
met  
beob  
Met



hellen Linien der Photo- und Chromosphäre kaum. Mit meiner Einrichtung sah ich einen Theil des Sonnenrandes und zwar sowohl senkrecht als parallel zum Spalte mitunter ganz scharf begrenzt, sonst in welliger, zitternder Bewegung. Der Himmel war bei dieser Beobachtung unbewölkt. Am 8. October sah ich nach gewöhnlicher Methode die hellen Linien *C* und *F* der Chromosphäre bei radialer und tangentialer Stellung des Spaltes sehr gut,  $D_3$  war in beiden Stellungen nicht zu sehen. Mit meiner Einrichtung sah ich Theile des Sonnenrandes senkrecht und parallel zum Spalte scharf begrenzt.

Aus der Grösse der Krümmung schätzte ich den auf einmal übersehenen Theil des Sonnenrandes auf etwa ein Zehntel des ganzen Umfangs, bei Fernröhren von geringerer Brennweite als der sehr beträchtlichen (160 par. Zoll) des grossen Refractors der berliner Sternwarte würde man einen erheblich grössern Theil der Sonne auf einmal übersehen. Ich habe bei diesen Beobachtungen den Sonnenrand nicht systematisch abgesucht, um Protuberanzen zu entdecken, da es mir zunächst nur darauf ankam, die die Brauchbarkeit der Methode zur Herstellung homogener Sonnenbilder zu prüfen.

Die Herstellung eines homogenen Sonnenbildes ist nun nicht nur zur Erkenntniss der physikalischen und chemischen Vorgänge auf der Sonne von Wichtigkeit, nicht nur ein Bedürfniss für die Astrophysik, auch die reine Astronomie hat ein Interesse an der Herstellung desselben. Ein homogenes Sonnenbild kann frei erhalten werden von den Bildern der gasigen, farbige Licht aussendenden Umhüllungen, und das ist für die Bestimmung der Contacte eines an der Sonne vorüberziehenden Planeten mit dem Sonnenrande von Wichtigkeit. Doch dazu ist es vorthellhaft, die Beobachtungsmethode so einzurichten, dass man leicht auch ein homogenes Sonnenbild mit Fadenmikrometer und Anwendung des Fernrohrs in gewohnter Weise beobachten kann. Das erlaubt die vorher beschriebene Methode nicht so leicht, und zu diesem Zwecke habe ich

daher eine andere Methode gefunden, die wesentlich einfacher als die vorher angegebene ist. Sie besteht in Folgendem. Vor das Ocular eines Fernrohrs befestige ich einen Spectralapparat mit Amici'schen Prismen, dessen Collimatorlinse eine sehr kurze Brennweite, etwa 3 cm, hat, dessen Ocular entfernt ist, und der statt dessen eine spaltförmige Blendung besitzt. Er wird mit seinem Spalte unmittelbar in die Blendung am Ocular des Fernrohrs eingeschraubt, und ist so eingestellt, dass auf der spaltförmigen Blendung in seinem Beobachtungsrohre ein Spectrum des ersten Spaltes entworfen wird. Bei dieser Anordnung entwirft die Collimatorlinse vom letzten Bilde des Fernrohrs ein Bild dicht vor der ersten Fläche der Prismen, dies wird durch die Prismen spectral zerlegt und durch die Objectivlinse des Beobachtungsrohres als Lupe betrachtet und zwar in der Farbe, die die spaltförmige Blendung vom Spectrum des ersten Spaltes frei lässt. Das Auge des Beobachters wird hierbei unmittelbar hinter diese Blendung gehalten. Da die Einstellung des Spectralapparates ungeändert bleiben muss, um die Reinheit des Spectrums zu erhalten, so kann man eine genaue Einstellung entweder durch passende Verschiebung des Oculars des Fernrohrs bewirken, oder, wenn man die Einstellung des letztern ungeändert lassen will, durch passend gewählte Linsen, die man unmittelbar vor die Blendung am Auge hält. Ich habe zu meinen Versuchen ein terrestrisches Fernrohr von etwa 50 mm Oeffnung benutzt; in Verbindung mit der vorher beschriebenen Einrichtung konnte ich entfernte irdische Objecte, wie die Ziegel eines Daches, in allen Einzelheiten mit dem Spectroteleskop in homogenem Lichte ebenso deutlich sehen, wie bei der Beobachtung mit dem Fernrohr allein, und der Apparat war lichtstark genug, um sie auch bei sehr trübem Wetter in den mittleren Farben des Spectrums gut sichtbar erscheinen zu lassen. Die bisherige Zusammenstellung dieses Spectroteleskops war nur eine provisorische; ich hoffe, Gelegenheit zu erhalten, es in

vollk  
Mitt  
könn

entw  
ein  
selbs  
App  
hom  
teles  
naue  
die  
des  
um  
dies  
Fen  
gene  
App  
Fen  
gest  
obac  
Im  
rohr  
felk  
die  
zu  
mat  
Bes  
eine  
rohr  
geb  
dun  
Bes  
von  
zu

vollkommenerem Massstabe ausführen und dann weitere Mittheilungen und Beobachtungen mit demselben geben zu können.

Das Bild, welches das Fernrohr bei dieser Anordnung entwirft, und welches durch den angesetzten Apparat in ein einfarbiges verwandelt wird, kann auch ein Object selbst sein, und so kann ich diesen kleinen angesetzten Apparat auch allein benutzen, Bilder der Gegenstände in homogenem Lichte zu erhalten, er ist selbst ein Spectroteleskop. Zu beachten ist hierbei nur, dass man die genaue Einstellung durch besondere Linsen bewirken muss, die man unmittelbar vors Auge hält, da man die Theile des Spectroteleskops gegeneinander nicht verschieben darf, um nicht die Reinheit des Spectrums zu zerstören. In dieser Weise konnte ich das zarte Muster in weissen Fenstervorhängen in allen Einzelheiten in beliebigem homogenem Lichte deutlich erkennen. Mir scheint dieser kleine Apparat, der in seiner äussern Form vollkommen dem Fernrohre gleicht, von Wichtigkeit für die Physik. Er gestattet leicht, an Stelle des Fernrohrs gesetzt, die Beobachtungen in jeder Farbe des Spectrums anzustellen. Im Kohlrausch'schen Totalreflectometer statt des Fernrohrs angewandt, würde er bei Beleuchtung des den Schwefelkohlenstoff enthaltenden Gefässes mit weissem Lichte die Brechungsexponenten für jede Farbe des Spectrums zu bestimmen gestatten; in einem Goniometer mit Collimatorrohr, auf dessen Tischchen eine Krystallplatte zur Bestimmung der Axenwinkel aufgesetzt ist, würde er mit einem Nicol vorm Auge und vorm Spalte des Collimatorrohres die Axenwinkel für alle homogenen Farben ergeben, zwei für die Krystallographie sehr wichtige Anwendungen. In der physikalischen Optik würde er eine leichte Bestimmung der Reflexionsconstanten mit Benutzung der von mir<sup>1)</sup> angegebenen Methode gestatten; man befestige zu diesem Zwecke in der Focalebene der Collimatorlinse

1) Glan, Wied. Ann. 7. p. 328. 1879.

des Spectroteleskops ein Fadenkreuz und den Babinet'schen Compensator und einen Nicol mit Theilkreis vor der Blendung am Auge und setze diesen Apparat bei einem Goniometer an Stelle des Fernrohrs.

Endlich sei noch eine Anwendung erwähnt, die für die Saccharimetrie von Interesse ist. Bringt man in der Focalweite der Collimatorlinse des Spectroteleskops eine kreisförmige Blendung an, die zur Hälfte mit einer Quarzplatte bedeckt ist, wie beim Laurent'schen Saccharimeter und einen Nicol am Auge, ferner in einiger Entfernung ein Collimatorrohr mit einem Nicol vor seiner Oeffnung, so erhält man ein Saccharimeter für alle Farben. Stellt man das Spectroskop auf Blau ein, so würde man die Drehungen der zu untersuchenden Körper im blauen Lichte untersuchen können, während man sie sonst meist im weissen oder Natronlichte untersucht. Bei dem erheblich grösseren Drehungsvermögen der meisten Körper für blaues Licht würde somit dies Saccharimeter viel empfindlicher sein als die gebräuchlichen.

Ich behalte mir vor, seiner Zeit über die Ausführung der hier vorgeschlagenen Untersuchungsmethoden zu berichten.

Berlin, den 4. Januar 1880.

### VIII. *Ueber eine neue einfache Art der Schlierenbeobachtung; von V. Dvořák.*

Die Toepler'sche Methode der Schlierenbeobachtung<sup>1)</sup> gibt wohl ausgezeichnete Resultate, aber sie ist von Umständen begleitet, welche ihre Verwendung erschweren. Abgesehen davon, dass der Schlierenapparat kostbar und complicirt ist, ist das Gesichtsfeld desselben ziemlich klein (beim Apparate Toepler's war der Durchmesser des Gesichtsfeldes = 11,5 cm); auch können nicht mehrere gleichzeitig die betreffenden Erscheinungen beobachten. In solchen

1) Toepler, Pogg. Ann. 131. p. 33 u. 180. 1867.

Fällen nun, wo die Toepler'sche Methode wegen der eben angeführten Umstände nicht gut anwendbar ist, kann man sich der hier beschriebenen Methode bedienen.

Der optische Apparat ist höchst einfach. Von dem Spiegel eines gewöhnlichen Heliostaten werden die Sonnenstrahlen auf eine Sammellinse  $ab$  (Taf. II Fig. 8) geleitet (Brennweite = 22,6 cm, Durchmesser = 7,1 cm) und treffen dann weiter auf eine zweite Sammellinse  $cd$  (Brennweite = 19,3 cm, Durchmesser = 2,8 cm). Die Entfernung der Linsen ist etwas kleiner als die Brennweite der Linse  $ab$ ; ich stellte die Linsen gewöhnlich in eine Entfernung von 21 cm. Ich habe dieses Linsensystem bei dem Heliostaten schon vorgefunden; es diente zur Projection der Polarisationserscheinungen.

Ein sehr wichtiger Theil ist ein Metalldiaphragma bei  $f$  (dem Brennpunkte des Linsensystemes) mit kreisförmiger Oeffnung von 1 mm Durchmesser. Die Ränder der Oeffnung sind zugeschärft, und das Diaphragma ist innen gut geschwärzt; es ist weiter in einem kurzen Röhrenstück befestigt, welches auf die Fassung der Linse  $cd$  aufgesteckt wird. Der Kegel der Sonnenstrahlen, welche aus  $f$  herauskommen, wird in einem dunklen Zimmer auf einem weissen Schirm  $mn$  aufgefangen. Die Entfernung  $fo$  beträgt 4,6 m. Die Objecte, welche man untersuchen will, stellt man in den Sonnenstrahlenkegel bei  $l$  in 2 bis 2,1 mm Entfernung von  $f$ . Der kreisförmige Durchschnitt des Kegels bei  $l$  hat einen Durchmesser  $ik$  von 70 cm; das ist also, wie man leicht sieht, der Durchmesser des Gesichtsfeldes.

In den meisten Fällen ist ein so grosses Gesichtsfeld unnöthig, während die breite beleuchtete Fläche  $mn$  am weissen Schirme im Versuchszimmer eine etwas störende Helligkeit verbreitet. Man verkleinert den Lichtkreis  $mn$  durch ein vor die Linse  $ab$  gesetztes Diaphragma  $gh$  von 43 mm Durchmesser. Dann ist der Durchmesser des Gesichtsfeldes  $ik = 41$  cm. Ich habe bei allen Versuchen, wo nicht ausdrücklich das Gegentheil angeführt ist, das Diaphragma  $gh$  verwendet.

Die Objecte, welche sich bei  $ilk$  befinden, werfen einen Schatten auf den Schirm  $mn$ , und wir untersuchen eigentlich bloß den Schatten der Objecte. Der Rand des Schattens ist nicht scharf begrenzt, sondern zeigt Beugungserscheinungen.

Die Linse  $cd$  kann man auch fortlassen. Ich benutzte sie aber regelmässig, weil man so eine gleichmässige Beleuchtung des weissen Schirmes erhält. Jede Ungleichmässigkeit am Heliostatenspiegel und an der Linse  $ab$  zeigt sich deutlich am Schirme  $mn$ , so lange man bloß die Linse  $ab$  allein anwendet, verschwindet jedoch fast ganz, sobald die Linse  $cd$  hinzukommt. Man überzeugt sich leicht davon, wenn man den Spiegel oder die Linse an einer Stelle etwas befeuchtet. Was das Diaphragma bei  $f$  betrifft, so erhöht dasselbe beträchtlich die Empfindlichkeit des Apparates.

Natürlich braucht man sich an die hier angeführten Dimensionen des Apparates nicht genau anzuhalten, sondern man kann durch Probiren leicht herausfinden, welche Entfernungen der beiden Linsen und des Schirmes das beste Resultat geben.

Im Folgenden werde ich zuerst einige Versuche beschreiben, welche sich mit unserem Apparate ausführen lassen, und zum Schlusse werde ich einiges über dessen Theorie hinzufügen.

**Prüfung der Empfindlichkeit.** Die Empfindlichkeit des Apparates ist überraschend und kommt vielleicht der merkwürdigen Empfindlichkeit des Toepler'schen Apparates gleich.

Man bringe die warme Hand in den Kegeldurchschnitt bei  $k$ , und man sieht dann deutlich auf dem Schirme  $mn$  die von der Hand erwärmte Luft in Strömen aufsteigen. Auch die Probe der Empfindlichkeit, welche Toepler für seinen Apparat benutzte, besteht unser Apparat ganz gut. Man nehme zwei gleiche Cuvetten von vorzüglichem Spiegelglase, wie man sie für die Lichtabsorption benutzt. Die beiden Glaswände einer jeden müssen möglichst parallel sein. Die Cuvetten werden mit reinem Wasser gefüllt und

durch  
Durch  
schon  
die e  
Heben  
Cuvet  
ström  
schied  
selbst  
bar k  
eine  
V  
einige  
Appa  
I  
lich  
zeigt  
die G  
I  
Sorte  
Wass  
einem  
das V  
herun  
I  
desse  
dens  
lich  
sich v  
dunkl  
Ober  
I  
eine S  
Strei  
I  
suche  
Schw

durch eine heberförmige Glasröhre von 1,8 mm innerem Durchmesser miteinander verbunden. Diese Glasröhre wird schon vorher ebenfalls mit Wasser gefüllt. Hebt man die eine Cuvette *A* (Taf. II Fig. 9), so fließt durch die Heberwirkung der Glasröhre das Wasser in die zweite Cuvette *B*. Der Wasserstrahl, welcher aus der Röhre auströmt, ist in der Cuvette *B* sehr gut sichtbar. Der Unterschied der Brechungsexponenten für den Wasserstrahl selbst und für das umgebende Wasser ist sicher unmessbar klein, und ist daher die Empfindlichkeit des Apparates eine fast unbegrenzte.

Weitere Versuche. Ich führe hier zuerst bloss einige Vorlesungsversuche an, welche sich leicht mit unserem Apparate ausführen lassen.

Ein Stück gewöhnliches Fensterglas zeigt sich natürlich sehr ungleichmässig. Aber auch gutes Spiegelglas zeigt gewöhnlich Flecken und Streifen, besonders wenn man die Glasfläche gegen die Sonnenstrahlen schief hält.

Für Flüssigkeiten nehme man eine Cuvette grösserer Sorte von etwa 3 cm Breite. Füllt man dieselbe mit Wasser und bläst auf die Oberfläche (nach Toepler) mit einem kleinen Blasebalge, so kühlt sich durch Verdunstung das Wasser oben ab und sinkt dann herunter. Dieses heruntersinkende Wasser sieht man am Schirme *mn* ganz gut.

Man erwärme weiter stark einen Löthkolben und halte dessen Spitze einige Secunden mit einem Punkte des Bodens der Cuvette in Berührung. Der Boden muss natürlich von Metall und nicht allzu dick sein. Sofort erhebt sich von der erwärmten Stelle eine ziemlich scharf begrenzte dunkle Säule mit pilzartigem Kopfe, welche sich auf der Oberfläche ausbreitet.

Hält man mit einer Pincette ein Salzkörnchen nur eine Secunde lang in die Wasseroberfläche, so sinken dunkle Streifen von Salzlösung herab.

Auch mit Gasen und Dämpfen lassen sich leicht Versuche anstellen. Man öffne eine Flasche mit Aether (oder Schwefelkohlenstoff) und neige dieselbe so weit, bis die



Flüssigkeit beinahe ausfliesst. Man sieht dann deutlich und auf einer grossen Strecke die Aetherdämpfe heruntersinken. Gut ist es, wenn dabei die Luft recht ruhig ist. Auch die bekannten Versuche des Uebergiessens von Kohlensäure aus einem Gefäss in ein zweites, das Ueberfliessen der Kohlensäure über den Rand des Gefässes etc., kann man leicht an dem Schirme *mn* zur Anschauung bringen. Ein leicht ausführbarer Versuch ist auch folgender. Man gebe in ein hohes, oben verengtes Gefäss (Mischcylinder) etwas Wasser und Natriumbicarbonat, dann schütte man etwas Schwefelsäure nach. Es entsteht eine augenblickliche Kohlensäureeruption, welche am Schirme *mn* einen überraschenden Anblick gewährt.

Ein hübsches Bild gibt ein Bunsen'scher Brenner, dessen Flamme man recht klein macht. Man sieht Massen von erwärmter Luft vom Brenner aufsteigen, meistens in scharfer Begrenzung mit eigenthümlichen Formen. Es ist gut, zu diesem Zwecke das Diaphragma *gh* zu entfernen, weil man ein grosses Gesichtsfeld braucht.

Sehr gut lässt sich unsere Methode auf die Untersuchung empfindlicher Gasstrahlen anwenden. Tyndall<sup>1)</sup> machte die Gasstrahlen durch beigemischtem Salmiakrauch sichtbar. Er glaubt jedoch, dass die Empfindlichkeit der Gasstrahlen grösser wäre, falls man selbe ohne beigemischten Salmiakrauch sehen könnte. An einer andern Stelle erwähnt er, dass „die kleinste Menge mechanisch vertheilter Unreinigkeit auf die Flamme den grössten Einfluss habe“. Der Salmiakrauch ist selbst eine solche Unreinigkeit, und ausserdem verstopft er bald die Oeffnung der Ausflussröhre. Da wir nun auch einen reinen Gasstrahl leicht sichtbar machen können, so entfällt die unbequeme Anwendung des Salmiakrauches. Ich führte meine Versuche auf folgende Art aus. Ich nahm einen Blasebalg (von Koenig), welcher sehr gleichmässig wirkte, und zwar im Durchschnitte mit einem Drucke von 65 mm

1) Tyndall, Der Schall, II. Aufl. p. 289.

Wasser  
licht  
in ein  
fast zu  
durch  
0,8 bis  
schwin  
Hahn  
kurz un  
Stücke  
wird z  
lassen,  
zischer  
balg m  
Druck  
D rich  
Gasstr  
einnim  
für Z  
Tynd  
tiefe  
Sprich  
so kor  
Einflu  
am B  
Tisch,  
so ver  
seiner  
F  
könn  
wir w  
wieder  
Jedoc  
Leuch  
I  
wärme  
den 1



Wasser. Die Luft ging aus dem Blasebalge in eine möglichst grosse Flasche *A* (Taf. II Fig. 10), weiter von dort in eine kleinere *B*, und zwar durch eine Röhre, welche fast zum Boden der Flasche *B* reichte. Die Luft strömte durch die Röhre *C* aus. Die Ausströmungsöffnung hatte 0,8 bis 2 mm im Durchmesser. Die Ausströmungsgeschwindigkeit wird durch den Hahn *D* regulirt. Ist der Hahn zu viel oder zu wenig geöffnet, so ist der Gasstrahl kurz und unempfindlich. In die Flasche *B* bringt man einige Stücke mit Aether getränkter Baumwolle. Der Blasebalg wird zuerst vollständig gefüllt und dann sich selbst überlassen, bis er sich ganz entleert; er darf dabei weder zischen noch knarren. Natürlich könnte man den Blasebalg mit Vortheil durch einen Gasometer mit constantem Drucke ersetzen. Hat man den Ausfluss durch den Hahn *D* richtig regulirt, so wird am Schirme *mn* ein schöner Gasstrahl sichtbar, der zuweilen das ganze Gesichtsfeld einnimmt und sehr empfindlich ist. Für hohe Töne, sowie für Zischen ist derselbe nicht empfindlich, wie es schon Tyndall bei seinen Rauchstrahlen beobachtete, aber für tiefe Töne ist seine Empfindlichkeit ausserordentlich. Spricht man, oder singt man mit sehr gedämpfter Stimme, so kommt der Strahl in die grösste Unruhe. Sehr grossen Einfluss hat das Gehen, sowie das Scharren des Fusses am Boden. Tupft man unhörbar mit dem Finger auf den Tisch, auf welchem sich die Flaschen *A* und *B* befinden, so verkürzt sich der Strahl augenblicklich auf ein Drittel seiner Länge; zuweilen theilt er sich dabei gabelförmig.

Falls wir uns nicht vor dem Gasgeruche scheuen, können wir auch Leuchtgas verwenden. Dann brauchen wir weder Blasebalg noch Flaschen, Die Hauptsache ist wiederum die Regulirung des Ausflusses durch einen Hahn. Jedoch ist Aetherdampf etwas deutlicher sichtbar, als Leuchtgas.

Ich führte ausserdem noch einige Versuche mit erwärmter und abgekühlter Luft aus. Wir brauchen dazu den Blasebalg und die grosse Flasche *A*. Hinter dem

Hahn *D* setzt man ein Kautschukrohr an und an dasselbe eine schraubenförmig gewundene Kupferröhre *abcd* (Taf. II Fig. 11). Der schraubenförmige Theil wird am Bunsenbrenner bis zum Rothglühen erhitzt; natürlich muss der gerade Theil *cd* genug lang sein, damit nicht die bei *d* aufgesteckte Kautschukröhre durch die Hitze verdirbt. Nach Erhitzung der Kupferröhre entfernt man den Bunsenbrenner, füllt den Blasebalg und lässt die Luft bei *a* aus einer Oeffnung von 1 bis 1,5 mm ausströmen. Die Empfindlichkeit des Gasstrahles wird wiederum durch den Hahn *D* regulirt. Man sieht den Strahl noch dann ganz deutlich, wenn man das Kupferrohr *bc* bequem mit der Hand anfassen kann, wobei die Temperatur desselben also nicht mehr als beiläufig  $35^{\circ}$  C. beträgt. Die von der Oberfläche des Kupferrohres aufsteigende erhitzte Luft wirkt störend und verdeckt theilweise den Luftstrahl. Man kann dieselbe auf zweierlei Art unschädlich machen. Man stellt entweder die ganze Röhre *abcd* schief, sodass die von der Röhre aufsteigende Luft den Gasstrahl nicht trifft, oder man lässt die Röhre vertical und setzt ein Thongefäss *fg*, dessen Boden bei *h* durchbohrt ist, möglichst luftdicht auf den konisch verjüngten Theil *ab* der Röhre.

Falls man mit abgekühlten Luftstrahlen Versuche anstellen will, so stellt man den schraubenförmigen Theil *bc* der Röhre in eine Kältemischung. Auch solche Strahlen sind gut sichtbar und empfindlich.

Versuche mit dem electrischen Funken. Mehrere Versuche hat schon Toepler mit seinem Schlierenapparate ausgeführt. Ich will hier nur einiges über den Inductionsfunken hinzufügen. Man urtheilt aus verschiedenen electrischen Erscheinungen, dass die Luft, welche vom + Pole fortfliegt, eine grössere Geschwindigkeit besitzt, als die Luft, welche in entgegengesetzter Richtung vom - Pole fortgetrieben wird.<sup>1)</sup> Mit Hülfe der Schlieren-

1) Siehe darüber ausführlich Wiedemann, Galvanismus, 2. (2) p. 299 ff. Um den + Pol vom - Pol zu unterscheiden, bedient man sich der ungleichen Erwärmung der beiden Electroden. Man lasse den

method  
scheine

Ich  
appara  
dessen  
Elemen  
gespitz  
war 3-  
Gänge  
einfach  
trächtl  
man d  
macht,  
die in  
pisch  
radiale  
nicht  
die Bi  
welche  
nahe  
das Li  
stelle  
des U  
Fig. 1  
Scheib  
mässig  
tallsch  
des U  
wegt.  
chen  
den -  
den F  
Luftst  
sieht,

Funker  
der -  
zen), w

methode sieht man Erscheinungen, welche das zu bestätigen scheinen.

Ich benutzte bei meinen Versuchen einen Inductionsapparat von Ruhmkorff mit Foucault'schem Unterbrecher, dessen Spule 36,5 cm lang war, und der durch 6 Smee'sche Elemente erregt wurde. Als Electroden dienten zwei zugespitzte Platindrähte von 0,6 mm Dicke. Ihre Entfernung war 3—4 mm. Die Erscheinung, welche man bei raschem Gange des Unterbrechers am Schirme *mn* sah, zeigt in einfachen Umrissen die Taf. II Fig. 12. Man erhöht beträchtlich die Schärfe des Bildes am Schirme *mn*, wenn man die Oeffnung des Diaphragmas bei *f* recht klein macht, etwa 0,5 mm im Durchmesser. Man kann weiter die in Taf. II Fig. 12 dargestellte Erscheinung stroboskopisch mittelst einer rotirenden Scheibe mit 4—6 engen radialen Schlitzten näher untersuchen. Man sieht dann nicht nur, wie die Erscheinung allmählich entsteht, sondern die Bilder sind auch bedeutend schärfer. Die Scheibe, welche sich um eine horizontale Axe dreht, kommt recht nahe zum Diaphragma bei *f* (Taf. II Fig. 8) und lässt das Licht immer nur auf sehr kurze Zeit durch. Weiter stelle man den Inductionsapparat so auf, dass der Schatten des Unterbrechers nahe zu dem Schatten der in Taf. II Fig. 12 abgebildeten Electroden fällt. Dreht man die Scheibe sehr gleichmässig (man setzt, um diese Gleichmässigkeit zu begünstigen, auf die Axe eine schwere Metallscheibe), so bringt man es bald dahin, dass der Schatten des Unterbrechers stille steht oder sich nur langsam bewegt. In letzterem Falle sieht man, wie ein kleines Wölkchen erwärmter Luft am + Pole auftaucht und sich gegen den — Pol allmählich vergrössert. Dieses würde also für den Funken einen momentanen, vom + Pole ausgehenden Luftstrom anzeigen. Da man am — Pole nichts Aehnliches sieht, so scheint der vom — Pole ausgehende Luftstrom so

Funken zwischen zwei dünnen Platindrähten überspringen, dann wird der — Pol rothglühend (bei stärkeren Apparaten kann er sogar schnelzen), während der + Pol nur wenig erwärmt wird.

schwach zu sein, dass er der Beobachtung entgeht. Die in der Taf. II Fig. 12 sichtbaren zurückgeschlagenen Wülste *a* und *b* zeigen sich auch oft bei kleinen Rauchsäulen, sowie besonders gut bei herabfallendem Aetherdampf auf dem vordern Ende der Säule und scheinen eine Wirkung des Luftwiderstandes zu sein. Die Fahne *c* am — Pole rührt von der erwärmten Luft her, welche langsam aufsteigt; sie scheint wie durch einen vom + Pole ausgehenden Luftstrom zur Seite getrieben. Wechselt man die Pole durch den Commutator, so kehrt sich die Erscheinung sofort um. Nimmt man die Funkenlänge grösser als 3 — 4 mm, so schwindet der Unterschied zwischen dem + und dem — Pole immer mehr, und bei einer Funkenlänge von einigen Centimetern ist es schon schwer, diesen Unterschied zu finden. Die Funkenbahn wird dann auch schon unregelmässig. Nimmt man statt des Drahtes der — Electrode eine Kugel, so zeigt sich die in Taf. II Fig. 13 dargestellte Erscheinung, welche wiederum einen von der + Electrode ausgehenden Luftstrom anzuzeigen scheint. Eine ähnliche Erscheinung erhält man, wenn beide Electroden kugelförmig sind.

Zum Schlusse mache ich auf die hübschen Erscheinungen aufmerksam, welche das Bild des Inductionsfunken zeigt, wenn derselbe eine beträchtliche Länge besitzt, nämlich etwa 20—30 cm.

Theorie des Apparates. Man gebe einen runden Glasstab *qp* in den Strahlenkegel bei *l* (Taf. II Fig. 8). Trotz seiner Durchsichtigkeit wirft er einen dunklen Schatten *rs*, gerade so, wie ein vollkommen undurchsichtiger Körper. Die Ursache ist, dass die Sonnenstrahlen, welche durch *qp* hindurchgehen, nach allen möglichen Richtungen zerstreut werden, bevor sie den Schirm *mn* erreichen. In den geometrischen Schatten *rs* kommen deshalb nur äusserst wenig Strahlen, und derselbe erscheint also dunkel. Etwas Aehnliches tritt ein, wie es scheint, wenn wir z. B. eine Gassäule in den Strahlenkegel versetzen. Aber wegen des geringen Unterschiedes der Brechungsexponenten von Luft

und G  
ren, n  
len, v  
jeningen  
Man s  
ten d  
werden  
will a  
nungen  
achtet  
Fig. 1  
flussrö  
ebene  
schlos  
Seite  
chen  
runde  
so ste  
empos  
Strah  
abhän  
die O  
in d  
beide  
Dure  
Mitte  
hübs  
recht  
Breit  
nung  
feren  
man  
fluss  
gekle  
schm  
lebbh

und Gas werden die Strahlen, welche die Gassäule passieren, nur wenig abgelenkt. Ausserdem werden die Strahlen, welche durch die Gassäule hindurchgehen, mit denjenigen, welche neben derselben vorbeigehen, interferiren. Man sieht daraus, dass die vollständige Theorie der Schatten durchsichtiger Körper sehr complicirt ist, und wir werden uns daher auf dieselbe nicht weiter einlassen. Ich will aber dennoch einige auffallende Interferenzerscheinungen anführen, welche ich bei meinen Versuchen beobachtet habe. Nehmen wir wiederum die Flasche *B* (Taf. II Fig. 10) mit in Aether getränkter Baumwolle. Die Ausflussröhre *C* soll aber ziemlich breit sein (etwa 1 cm.). Ihr ebener Rand wird oben mit einer dünnen Metallplatte geschlossen, welche eine quadratische Oeffnung von 5 mm Seite besitzt. Auf die Metallplatte klebt man ein Stückerhen starken Stanniol auf, in welchem sich eine kleine, runde Oeffnung befindet. Blasen wir durch die Flasche *B*, so steigt aus dieser Oeffnung ein Strahl von Aetherdämpfen empor. Die Interferenzerscheinungen am Schatten des Strahles sind von dem Durchmesser der Ausflussöffnung abhängig. Ist derselbe = 0,56 mm,  $lf = 2,15$  m,  $fo = 4,6$  m, die Oeffnung des Diaphragmas bei  $f = 0,5$  mm, so zeigt sich in der Mitte des Schattens ein lichter Streifen, und zu beiden Seiten farbige, helle und dunkle Streifen. Ist der Durchmesser der Oeffnung = 3,4 mm, so zeigen sich in der Mitte des Schattens zwei schmale, dunkle Streifen. Eine hübsche Erscheinung gibt eine in Stanniol ausgeschnittene rechteckige Ausflussöffnung von 4 mm Länge und 0,25 mm Breite. Der Strahl verengt sich stark oberhalb der Oeffnung (*contractio venae*) und zeigt lebhaft gefärbte Interferenzstreifen. Zierliche Interferenzerscheinungen erhält man auch, wenn das Stanniolblättchen, welches die Ausflussöffnung trägt, nicht luftdicht auf die Metallplatte aufgeklebt ist, sodass zwischen beiden an verschiedenen Stellen schmale Gasstrahlen entweichen. Diese zeigen regelmässig lebhaft farbige Streifen.

Agram, den 25. October 1879.

IX. *Beitrag zur Geschichte der mechanischen Theorie der Wärme; von Emil Oehler.*

In Jacob Hermann's „Phoronomia sive de Viribus et Motibus Corporum solidorum et fluidorum, libri duo, 1716“ findet sich p. 376 Folgendes:

Caput XXIV. De motu intestino fluidorum.

658. Hoc nomine non intelligitur hoc loco internus molecularum motus fluidi cujuscunque in suo statu naturali consistentis, sed is particularum motus, qui in fluidis a causis externis et accidentalibus excitari solet, quo calor praesertim est referendus, qui dubio procul ex concitatore particularum motu in corpore calido a causis externis producit. Utut vero ejusmodi motus intestinus admodum perturbatus sit, nihilo tamen minus regula physice satis accurata pro ejus mensura media tradi potest.

Propositio LXXXV. Theorema.

659. Calor, caeteris paribus, est in composita ratione ex densitate corporis calidi, et duplicata ratione agitationis particularum ejusdem.

Agitatio particularum est celeritas media inter celeritates particulares, quibus calidi corporis particulae agitantur. Vocetur haec celeritas media  $V$ , et corporis densitas  $D$ . Jam, quia calor consistit in concitatore particularum motu, calor erit, ut impressiones particularum corporis calidi in quopiam objecto corpore calorem excipiente, sed hae impressiones sunt in composita ratione ex duplicata celeritatum et simpla densitatum seu, ut  $D \cdot V^2$ . Ergo etiam calor est ut  $D \cdot V^2$ . Quod erat demonstrandum.

Dictum in propositione „caeteris paribus“, id est, in corporibus similis texturae.

Scholion.

660. Ex hac propositione jam elicere licebit modum metiendi agitationem particularum aëris. ect. ect.

Strassburg, den 20. Januar 1880.